

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Commande linéaire quadratique de systèmes non linéaires

Grandrath, Céline

Award date:
2002

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

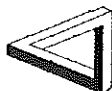
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



FUNDP
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Rempart de la Vierge, 8
B-5000 Namur Belgique

Commande linéaire quadratique de systèmes non linéaires



Mémoire présenté pour l'obtention
du grade de
Licencié en Sciences Mathématiques
par

GRANDRATH Céline

Avant de débiter ce mémoire, je tiens à remercier certaines personnes.

Mon promoteur, Mr. J.Winkin, d'avoir accepté de travailler avec moi, et qui pendant tout ce temps, m'a soutenue et m'a aidée quand je ne m'en sortais plus toute seule.

De même, Mr. F.M. Callier, d'avoir consacré son temps pour participer à mes séminaires, et de m'avoir fait découvrir le contrôle et la théorie des systèmes.

Sans oublier tous les autres professeurs qui durant ces seize dernières années, m'ont accompagnée sur un petit bout de mon chemin.

Ma famille, qui m'a toujours soutenue et m'a donné la force de continuer et de croire en moi, quand je doutais.

Mes amis, pour lesquels je n'avais parfois que peu de temps en vue de mes études, mais qui ne m'ont jamais lâchée et sont ainsi restés à mes côtés.

Commande linéaire quadratique de systèmes non linéaires

Resumé :

Ce mémoire traite un problème inverse de contrôle optimal, afin de trouver des conditions d'optimalité, apportées par un contrôle linéaire-quadratique (LQ), pour un système non-linéaire et variable.

La loi de contrôle est obtenue par optimisation quadratique de la partie linéaire du système.

Une fois l'optimalité du système non-linéaire en boucle fermée établie, la robustesse de la stabilité de ce système par rapport à des variations bornées de la dynamique en boucle ouverte, est analysée en termes de marges de gain et de phase.

Linear quadratic control for nonlinear systems

Abstract :

This work is concerned with an inverse optimal control problem, which is to find conditions for optimality of a nonlinear time-varying plant driven by a linear quadratic optimal control.

The control law is obtained by the standard quadratic optimization of the linear part of the system.

Once optimality of the nonlinear closed-loop system is established, the robustness of stability with respect to bounded variation in open-loop dynamics is assured in terms of gain and phase margins.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Préliminaires	6
2.1	Système linéaire	6
2.2	Existence et unicité	11
2.3	Théorie de Lyapunov	12
3	Problème inverse d'optimalité	15
3.1	Description détaillée	15
3.2	Contrôle optimal	17
3.2.1	Système linéaire	17
3.2.2	Système non linéaire	20
4	Robustesse de la stabilité du système en boucle fermée	46
4.1	Rappel	46
4.2	Description de deux systèmes	47
4.3	Stabilité des deux systèmes	50
4.4	Stabilité en termes de marges de gain et de phase :	58
5	Application	74
5.1	Le problème	74
5.2	Equations de mouvement du système	75
5.3	Linéarisation du problème	79
5.4	Mise sous forme $\dot{x} = Ax + Bu + f(t, x, u)$	80
5.5	Vérification des hypothèses	82
6	Conclusion	88

Chapitre 1

Introduction

Ayant vu au cours de deuxième licence (systèmes optimaux asservis) l'optimalité d'un contrôle linéaire-quadratique (LQ) appliqué à un système linéaire, le cas d'un système non linéaire est étudié dans le cadre de ce mémoire.

L'intérêt pour ce problème vient du fait qu'en général les systèmes physiques sont de nature non linéaire, et donc que la théorie ayant été vue auparavant peut s'avérer insuffisante dans ce cadre. Par conséquent il est important d'envisager une extension de la théorie.

Le contrôle de systèmes non linéaires est un aspect essentiel de la théorie des systèmes dynamiques commandés et de ses applications. En particulier une approche classique consiste à approximer un système non linéaire par un système linéaire et de lui appliquer une loi de commande asservie conçue à partir de cette approximation.

L'objectif de ce mémoire est l'étude du problème de commande optimale au sens linéaire-quadratique de systèmes dynamiques non linéaires, sur base d'une approximation linéaire de tels systèmes. Il s'agit d'étudier l'optimalité (problème inverse) d'une telle commande et la robustesse de la stabilité du système asservi résultant.

Le but du chapitre consacré au problème inverse d'optimalité (chapitre 3), est de trouver le contrôle optimal d'un système non linéaire bien définie. Dans un premier temps, on considère la partie linéaire du système. En utilisant un théorème de la référence [2], on trouve un contrôle LQ optimal pour cette partie linéaire.

Ensuite, on définit un nouveau coût, afin que le contrôle optimal trouvé pour la partie linéaire reste encore optimal pour le système non linéaire (voir théo-

rème 3.2.1 et corollaire 3.2.1).

Le but du chapitre consacré à la robustesse de la stabilité du système en boucle fermée (chapitre 4), est de garantir la stabilité (robuste) du système en boucle fermée en présence de certaines perturbations.

Dans un premier temps, on définit deux systèmes perturbés : pour le premier, on considère une perturbation non linéaire, variable du contrôle optimal, et pour le deuxième, on considère une perturbation linéaire, constante du contrôle optimal.

Ensuite, en utilisant la théorie de Lyapunov (voir référence [3]), les théorèmes 4.3.1 et 4.3.2 garantissent la stabilité des deux systèmes perturbés.

Pour finir, on analyse la stabilité des systèmes perturbés en termes de marges de gain et de phase (voir corollaire 4.4.1).

Dans le dernier chapitre, on illustre la théorie, étudiée auparavant, au moyen d'un pendule inversé.

On démontre essentiellement que les hypothèses devant être vérifiées pour pouvoir appliquer les résultats théoriques à cet exemple, le sont effectivement.

La référence principale sur laquelle est basé ce mémoire est l'article [1].

A la fin de ce mémoire, on trouve une liste des notations, la bibliographie et les annexes.

Chapitre 2

Préliminaires

Ce chapitre contient quelques rappels concernant des définitions et des théorèmes qui seront indispensables pour la suite. Ces rappels concernent la théorie des systèmes commandés linéaires constants, ainsi que des éléments de la théorie des équations différentielles ordinaires non linéaires.

2.1 Système linéaire

Commençons par établir quelques définitions qui seront utilisées par la suite.

Définition 2.1.1

$R = [A, B, C, 0]$ est la description d'un système différentiel, linéaire, constant décrit, pour $t \geq t_0$, par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système au temps t .
- $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial du système.
- $x(t_1) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système au temps t_1 .
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée du système au temps t .
- $\mathcal{U} = \{u(.) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, u(.) \text{ est une fonction continue} \}$
= espace des entrées.
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie au temps t .
- A, B, C sont des matrices constantes, réelles de dimension

respectivement $(n \times n)$, $(n \times m)$ et $(p \times n)$.

Définition 2.1.2

1. On dit que l'état x_0 est contrôlable sur $[t_0, t_1]$, (en t_0)
 $\Leftrightarrow \exists u(.) \in \mathcal{U}_{[t_0, t_1]}, (\exists t_1 > t_0 \text{ et } u(.) \in \mathcal{U}_{[t_0, t_1]}), \text{ tel que}$

$$x(t_1) = 0$$

où $\mathcal{U}_{[t_0, t_1]} = \{u(.) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m, u(.) \text{ est une fonction continue} \}$

On définit $C(A, B, t_0)$ comme le sous espace contrôlable contenant les états x_0 contrôlables en t_0 .

2. On dit que x_0 est inobservable sur $[t_0, t_1]$, (en t_0)
 \Leftrightarrow la réponse à l'entrée nulle est telle que

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1], (\forall t \geq t_0)$$

On définit $NO(C, A, t_0)$ comme le sous espace inobservable contenant les états x_0 inobservables en t_0 .

3. La paire (A, B) est complètement contrôlable
 $\Leftrightarrow \forall t_0 \quad C(A, B, t_0) = \mathbb{R}^n$, où $C(A, B, t_0)$ représente le sous espace contrôlable
ou de manière équivalente :
 $\text{rang}[C] = n$, où C est la matrice de contrôlabilité définie comme suit :
 $C = (B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B)$, où n représente la dimension de l'état.

4. La paire (C, A) est complètement observable
 $\Leftrightarrow \forall t_0 \quad NO(C, A, t_0) = \{\theta\}$, où $NO(C, A, t_0)$ représente le sous espace inobservable.
ou de manière équivalente :

$\text{rang}[\mathcal{O}] = n$, où \mathcal{O} est la matrice d'observabilité définie comme suit :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}, \text{ où } n \text{ représente la dimension de l'état.}$$

5. La matrice A est (exponentiellement) stable

$\Leftrightarrow \exists$ des constantes $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ telles que $\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$|e^{A(t-t_0)}x_0| \leq \beta e^{-\gamma(t-t_0)}|x_0|, \quad \forall t \geq t_0$$

ou de manière équivalente :

les parties réelles des valeurs propres de A sont strictement négatives.

6. Après une transformation, on peut écrire les matrices A, B et C sous la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Alors la description $R = [A, B, C, 0]$ s'écrit :

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u$$

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

où

- A_1 est la matrice associée aux valeurs propres, ayant les parties réelles strictement négatives, de A .
- A_2 est la matrice associée aux valeurs propres, ayant les parties réelles positives ou nulle, de A .

$R_2 = [A_2, B_2, C_2, 0]$ est alors appelée la partie instable de R .

Définition 2.1.3

Considérons une description d'un système différentiel, linéaire, constant :

$R = [A, B, C, 0]$:

1. La description du système, R , ou la paire (A, B) est stabilisable

$\Leftrightarrow A$ est exponentiellement stable ou (A_2, B_2) , qui est la partie instable, est complètement contrôlable.

$\Leftrightarrow \exists$ une matrice d'asservissement d'état $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $A + BK$ est stable.

2. La description du système, R ou la paire (C, A) est détectable
 $\Leftrightarrow A$ est exponentiellement stable ou (C_2, A_2) , qui est la partie instable, est complètement observable.
 $\Leftrightarrow \exists$ une matrice d'injection de sortie $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ telle que $A + LC$ est stable.

Définition 2.1.4

On définit l'équation algébrique de Riccati normalisée, $(RA)_n$, car dans les théorèmes qui suivent on fait référence à P , qui est solution de cette fameuse équation.

$(RA)_n$:

$$0 = A^T P + P A - P B B^T P + C^T C$$

Annonçons maintenant les deux théorèmes, dont on aura besoin pour donner le coût et le contrôle optimal de notre système linéaire (voir chapitre 3), se trouvant dans la référence [2] :

Theorème 2.1.1

Considérons la description d'un système différentiel, linéaire, constant

$$R = [A, B, C, 0] :$$

où (A, B) est stabilisable et (C, A) est détectable.

Alors $(RA)_n$ admet une seule solution, P , symétrique, semi-définie-positive ($P = P^T \geq 0$) qui est stabilisante, c'est à dire

$$A_+ := A - B B^T P \text{ est exponentiellement stable}$$

c'est à dire les parties réelles des valeurs propres de A_+ sont strictement négatives.

De plus P est définie positive ($P > 0$) $\Leftrightarrow (C, A)$ est observable.

Définissons le problème de contrôle optimal linéaire quadratique normalisé en horizon infini avec $S = 0$, $(LQ)_n^\infty$:

Considérons les coûts quadratiques :

$$V_L(x_0, t_0, \infty, u) = \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{t_1} (\|Cx\|^2 + \|u\|^2) dt \quad (2.1)$$

- où
- $L \equiv I \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 - $Q \equiv I \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- sous
- $\dot{x} = Ax + Bu$
 - $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$
 - $u(.) \in \mathcal{U} = \{ u(.) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m, u(.) \text{ est une fonction continue.} \}$

Trouver le coût optimal et le contrôle optimal, u_L^0 , tels que

$$\forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

$$V_L(x_0, t_0, \infty, u_L^0) = V_L^0(x_0, t_0, \infty) := \inf_{u \in \mathcal{U}} V_L(x_0, t_0, \infty, u)$$

Theorème 2.1.2

Considérons la description d'un système différentiel, linéaire, constant

$$R = [A, B, C, 0] :$$

où (A, B) est stabilisable et (C, A) est détectable.

Soit $S = 0$, P la solution stabilisante de $(RA)_n$, et considérons le problème $(LQ)_n^\infty$.

Alors le coût optimal de $(LQ)_n^\infty$ est donné par :

$$V_L^0(x_0, t_0, \infty) = x_0^T P x_0$$

et est atteint par le contrôle optimal :

$$u_L^0 = -B^T P x, t \geq 0$$

Le résultat suivant, extrait de la référence [4], servira souvent pour les calculs :

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = A^T$, (c'est à dire A est symétrique)

Alors

1. $\lambda_{\min}(A)x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A)x^T x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
2. Si de plus $A > 0$ (c'est à dire définie positive)
alors $\|A\| = \lambda_{\max}(A)$
où $\lambda_{\min}(A)$ est la valeur propre minimale de A .
 $\lambda_{\max}(A)$ est la valeur propre maximale de A .

2.2 Existence et unicité

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle dépendant de t et x , extrait de la référence [3, page 38].

On aura besoin de ce résultat dans le chapitre 3, pour garantir l'existence d'une solution unique du système non linéaire.

Theorème 2.2.1 (Existence et unicité globale)

Considérons une équation différentielle non linéaire :

$$\dot{x} = p(t, x) ; \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.2)$$

où la fonction $p : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Supposons que $\forall T \in [t_0, \infty), \exists$ des constantes $k_T, h_T < \infty$, telles que

1. $\|p(t, x) - p(t, y)\| \leq k_T \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, T]$

Une fonction vérifiant cette condition est dite "globalement Lipschitz continue ."

2. $\|p(t, x_0)\| \leq h_T, \forall t \in [t_0, T]$

Alors (2.2) admet une solution unique sur $[t_0, \infty)$.

Remarques 2.2.1

1. Si $p(t, 0) = 0 \quad \forall t$

Alors la première hypothèse du théorème 2.2.1 entraîne la deuxième.

2. Annonçons maintenant un résultat, pour pouvoir garantir l'existence d'une solution unique d'une équation différentielle dépendant de t , x et u , où ce dernier est fixé.

Soit l'équation différentielle : $\dot{x} = p(t, x, u)$

Si $u(\cdot)$ est fixé, alors on peut définir une fonction

$p_u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$p_u(t, x) = p(t, x, u)$$

alors $\dot{x} = p_u(t, x)$.

3. Citons un résultat, extrait de la référence [3, page 46], dont on aura besoin dans le chapitre 3.

Considérons la fonction $p : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

continuellement différentiable en son second argument.

Alors la fonction p est globalement Lipschitz continue

$\Leftrightarrow \forall T$ fini, \exists une constante $k_T < \infty$ telle que

$$\left| \frac{dp_i(t, x)}{dx_j} \right| \leq k_T \quad , \quad \forall i, j, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, T].$$

où • x_j représente la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur x .

• $p_i(t, x)$ représente la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $p(t, x)$.

2.3 Théorie de Lyapunov

Cette théorie sera utilisée dans le chapitre 4, pour assurer la stabilité de systèmes en boucle fermée.

Mais, avant d'annoncer le théorème important de stabilité asymptotique, il faut commencer par donner quelques définitions utilisées :

Définition 2.3.1

1. Considérons une fonction $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$W(x) = x^T M x$ où la matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique ($M = M^T$)

W est une fonction définie positive $\Leftrightarrow M$ est définie positive ($M > 0$).

2. La fonction continue $W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est localement définie positive
 \Leftrightarrow
 (a) $W(0) = 0$
 (b) \exists une constante $r > 0$ telle que $W(x) > 0, \forall x \in B_r \setminus \{0\}$, où B_r représente une boule de rayon r , centrée en l'origine.

3. La fonction $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est localement définie positive (ldp) si
 (a) elle est continue.
 (b) $V(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq 0$.
 (c) \exists une constante $r > 0, \exists$ une fonction $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \in \mathcal{C}^K$ telles que

$$\alpha(\|x\|) \leq V(t, x), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in B_r$$

ou par un lemme extrait de la référence [3, page 149]

La fonction continue $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est localement définie positive (ldp)

\Leftrightarrow

- (a) $V(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$
 (b) \exists une fonction $W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ localement définie positive et \exists une constante $r > 0$ telles que

$$V(t, x) \geq W(x), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in B_r$$

✕

4. La fonction V est décroissante
 si \exists une constante $r > 0, \exists$ une fonction $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^K (K fois continuellement différentiable) telles que

$$V(t, x) \leq \beta(\|x\|), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in B_r$$

5. L'équilibre 0 d'une équation différentielle, non linéaire, décrit par (2.2) est uniformément asymptotiquement stable si

- (a) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon)$ tels que

$$\|x_0\| < \delta(\epsilon), t_0 \geq 0 \Rightarrow \|s(t, t_0, x_0)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

(b) \exists un paramètre $\eta > 0$ tel que

$$\|x_0\| < \eta, t_0 \geq 0 \Rightarrow s(t_0+t, t_0, x_0) \rightarrow 0 \ (t \rightarrow \infty) \text{ uniformément en } x_0, t_0$$

où $s(t, t_0, x_0)$ représente la solution de l'équation (2.2), correspondant à la condition initiale $x(t_0) = x_0$, évaluée au temps t .

Donc, s satisfait :

$$\frac{d}{dt}s(t, t_0, x_0) = p(t, s(t, t_0, x_0)) \quad \forall t \geq t_0$$

et

$$s(t_0, t_0, x_0) = x_0$$

Nous sommes maintenant en mesure d'annoncer le théorème suivant extrait de la référence [3, page 165] :

Theorème 2.3.1

L'équilibre 0 d'une équation différentielle, non linéaire décrit par (2.2) est uniformément asymptotiquement stable

Si \exists une fonction $V : C^1$ (continuellement différentiable), localement définie positive (ldp) et décroissante telle que l'opposé de la dérivée de V le long des trajectoires du système $(-\dot{V})$ est ldp.

Chapitre 3

Problème inverse d'optimalité

Considérons un système non linéaire dont la partie linéaire peut être optimisée en utilisant une loi de contrôle optimal linéaire quadratique (LQ). Le problème inverse de contrôle optimal qu'on veut résoudre, est le suivant :
" Quelles modifications faut-il faire sur le coût quadratique pour que la loi de contrôle trouvée pour le système linéaire reste encore optimale pour le système non-linéaire ? "

3.1 Description détaillée

Soit $R = [A, B, f]$ la description d'un système non linéaire, variable qui est décrit par :

$$R : \underbrace{\dot{x}}_{(n,1)} = \underbrace{A}_{(n,n)} \underbrace{x}_{(n,1)} + \underbrace{B}_{(n,m)} \underbrace{u}_{(m,1)} + \underbrace{f(t, x, u)}_{(n,1)} \quad (3.1)$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système au temps t .
- $x(t_0) = x_0$ est l'état initial du système.
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée du système au temps t .
- $\mathcal{U} = \{u(.) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, u(.) \text{ est une fonction continue} \}$.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont des matrices constantes.
- (A, B) est stabilisable.
- $f(t, 0, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
- Si $u(t) = 0$

alors $x = 0$ est le seul équilibre de R .

De plus, nous supposons que la fonction f vérifie la condition suivante :

\exists des constantes $\epsilon, \eta > 0$ telles que $\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\| f(t, x, u) \| \leq \epsilon \| x \| + \eta \| u \|$$

Proposition 3.1.1

Considérons la fonction $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

où $f \in C^p$ (p fois continûment différentiable).

Supposons de plus que $\forall T < \infty, \exists$ une constante $k_T < \infty$ telles que

$$\left| \frac{df_i(t, x, u)}{dx_j} \right| \leq k_T \quad , \quad \forall i, j \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Cette fonction est telle que (3.1) admet une solution unique :

$$\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathcal{U} \text{ fixé} : x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, u)$$

Preuve

$\forall (t_0, x_0, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$, (3.1) se transforme en :

$$\dot{x} = p(t, x, u) = Ax + Bu + f(t, x, u) ; \quad x(t_0) = x_0$$

Par le point 2 de la remarque 2.2.1, comme $u \in \mathcal{U}$ est fixé, on a que

$$\dot{x} = p_u(t, x)$$

Vérifions les deux hypothèses du théorème 2.2.1

1. Notons : • $(p_u(t, x))_i$ la i^{eme} composante du vecteur $p_u(t, x)$.
 • a_{ij} l'élément (i, j) de la matrice A .
 • x_j la j^{eme} composante du vecteur x .
 • $f_i(t, x, u)$ la i^{eme} composante du vecteur $f(t, x, u)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d(p_u(t, x))_i}{dx_j} \right| &= \left| a_{ij} + \frac{df_i(t, x, u)}{dx_j} \right| \\ &\leq |a_{ij}| + \left| \frac{df_i(t, x, u)}{dx_j} \right| \\ &\leq |a_{ij}| + k_T \quad (\text{par hypothèse.}) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Par le point 3 de la remarque 2.2.1, nous avons que la fonction p_u est globalement Lipschitz continue, c'est à dire la première hypothèse du théorème 2.2.1 est vérifiée.

$$\begin{aligned} 2. \quad \|p_u(t, x_0)\| &\leq \|A\| \|x_0\| + \|B\| \|u\| + \|f(t, x_0, u)\| \\ &\leq \|A\| \|x_0\| + \|B\| \|u\| + \epsilon \|x_0\| + \eta \|u\| \\ &= (\|A\| + \epsilon) \|x_0\| + (\|B\| + \eta) \|u\| \\ &< \infty \quad (\text{car } u \in \mathcal{U} \text{ est une fonction continue, donc bornée.}) \end{aligned}$$

Ce qui montre que la deuxième hypothèse est vérifiée.

Alors, par conclusion du théorème 2.2.1, le système (3.1) admet une solution unique.

□

3.2 Contrôle optimal

3.2.1 Système linéaire

Considérons la partie linéaire de R :

$$R_L : \dot{x} = Ax + Bu \tag{3.2}$$

Objectif :

Résoudre le problème suivant de contrôle optimal (LQ) en horizon infini avec $S = 0$, $(LQ)^\infty$

Considérons les coûts quadratiques :

$$\begin{aligned} V_L(x_0, t_0, \infty, u) &= \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{t_1} (\|x\|_L^2 + \|u\|_Q^2) dt \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} V_L(x_0, t_0, t_1, u) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où

- $L = L^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ constante (c.à.d. L est une matrice constante, symétrique, réelle, définie positive).
- $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ constante (c.à.d. Q est une matrice constante, symétrique, réelle, définie positive).

sous

- $\dot{x} = Ax + Bu$
- $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$
- $u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u(\cdot) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m, u(\cdot) \text{ est une fonction continue}\}.$

Trouver le coût optimal et le contrôle optimal, u_L^0 , tels que

$$\forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

$$V_L(x_0, t_0, \infty, u_L^0) = V_L^0(x_0, t_0, \infty) := \inf_{u \in \mathcal{U}} V_L(x_0, t_0, \infty, u)$$

Remarque 3.2.1

Comme $L = L^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} = L^T$ on a que $L^{\frac{1}{2}} = (L^{\frac{1}{2}})^T$

Suite à ceci, nous avons :

1. $\|x\|_L^2 = x^T L x = x^T (L^{\frac{1}{2}})^T L^{\frac{1}{2}} x = \|L^{\frac{1}{2}} x\|^2$,
ce qui entraîne que $C = L^{\frac{1}{2}}$
2. $\|u\|_Q^2 = u^T Q u$

Solution

1. L'équation algébrique de Riccati :

Il est nécessaire de commencer par établir l'équation algébrique de Riccati, car par la suite, on utilisera souvent P , qui sera la solution de cette équation.

On est dans le cas non-normalisé, donc l'équation $(RA)_n$ du chapitre 2, devient :

$$(RA) : 0 = A^T P + PA - PBQ^{-1}B^T P + L \quad (3.4)$$

En effet

$\overline{R} = [\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, 0]$: est une description normalisée.

Mais, on s'intéresse au cas non-normalisé, c'est à dire \overline{R} devient :

$\overline{R} = [A, BG^{-1}, HC, 0]$: est une description non-normalisée

où $L = H^T H$ et $Q = G^T G$.

Alors en remplaçant les matrices $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ dans l'équation algébrique de Riccati normalisée, on obtient l'équation algébrique de Riccati non-normalisée.

$$(RA)_n : 0 = (\overline{A})^T P + P\overline{A} - P\overline{B}(\overline{B})^T P + (\overline{C})^T \overline{C}$$

En remplaçant les matrices, on obtient

$$0 = A^T P + PA - PBG^{-1}(G^{-1})^T B^T P + C^T H^T HC$$

En y insérant maintenant les matrices L et Q , on atteint le résultat suivant

$$0 = A^T P + PA - PBQ^{-1}B^T P + L$$

2. Vérification des hypothèses des Théorèmes 2.1.1 et 2.1.2 :

1. (A, B) est stabilisable, ce qui est vérifié par les hypothèses établies au début.
2. La matrice $C = L^{\frac{1}{2}}$ est définie positive et symétrique, donc inversible, c'est à dire la paire (C, A) est observable et détectable.

Les hypothèses sont satisfaites, donc on peut appliquer les résultats du théorème 2.1.2, c'est à dire :

Le coût optimal est donné par :

$$V_L^0(x_0, t_0, \infty) = x_0^T P x_0$$

et est atteint par le contrôle optimal :

$$u_L^0 = -Q^{-1} B^T P x \quad (3.5)$$

où la matrice symétrique, définie positive, P est la solution stabilisante de l'équation algébrique de Riccati (RA).

Remarque 3.2.2

u_L^0 n'est en général pas le contrôle optimal pour le système R non linéaire. Donc, il faut définir un nouveau coût, dans le but que le contrôle optimal trouvé pour le système linéaire reste, sous certaines conditions, optimal pour le système non linéaire.

3.2.2 Système non linéaire

On va traiter deux cas :

- Premièrement, on s'intéresse au cas général.
- Deuxièmement, on augmente le gain d'asservissement d'état, pour ceci on séparera les variables.

<i>Premier cas</i>

On traite le cas général.

On utilise le système non linéaire, variable qui est décrit par :

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(t, x, u)$$

Remarque 3.2.3

En utilisant un autre coût qui tient compte de la partie non linéaire $f(t, x, u)$, u_L^0 deviendra le contrôle optimal de R .

On définit donc le nouveau coût :

$$\begin{aligned} V(x_0, t_0, \infty, u) &= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} \pi(t, x, u) dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} \pi(t, x, u) dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

où la fonction $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\pi(t, x, u) = x^T L x - 2x^T P f + u^T Q u \quad (3.7)$$

L'analyse développée dans cette sous-section est basée sur le résultat auxiliaire suivant. Voir la preuve du théorème 3.2.1

Lemme 3.2.1

Si

1. $x : [t_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue sur $[t_0, \infty[$
2. $x \in L_n^2$

où $L_n^2 := L^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^n) = \{f : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, f \text{ mesurable et } \int_{t_0}^{\infty} |f|^2 < \infty\}$.

Alors $x(t) \longrightarrow 0$ (quand $t \longrightarrow \infty$).

Preuve :

On démontre ce résultat par l'absurde, de manière à aboutir à une contradiction avec l'hypothèse $x \in L_n^2$.

1. $\exists \eta > 0, \exists (t_n) \in (t_0, \infty), t_n \rightarrow \infty$ et $\forall n$ tel que $|x(t_n)| \geq 2\eta > 0$:

En effet

En niant la thèse, on obtient : $x(t) \not\rightarrow 0$ (quand $t \rightarrow \infty$)

c'est à dire

$$\neg(\forall \epsilon > 0, \exists T_\epsilon > t_0, \forall t \geq T_\epsilon > t_0, \text{ tel que } |x(t)| \leq \epsilon)$$

c'est à dire

$$(\exists \epsilon > 0, \forall T_\epsilon > t_0, \exists t \geq T_\epsilon > t_0, \text{ tel que } |x(t)| > \epsilon)$$

donc

$$\exists \eta > 0, \exists (t_n) \in (t_0, \infty), t_n \rightarrow \infty \text{ et } \forall n \text{ tel que } |x(t_n)| \geq 2\eta > 0$$

2. \exists une sous-suite (t_{n_j}) de (t_n) telle que

$$\exists \delta \in (0, 1) \text{ tel que } \forall t \in (t_{n_j} - \delta, t_{n_j} + \delta) : |x(t)| \geq \eta > 0$$

En effet

Par hypothèse, $x(\cdot)$ est uniformément continue,

c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall s, t \in (t_0, \infty) : |s - t| < \delta \Rightarrow |x(s) - x(t)| < \epsilon$$

\Leftrightarrow

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in (0, 1) \text{ tel que } \forall s, t \in (t_0, \infty) : |s - t| < \delta \Rightarrow |x(s) - x(t)| < \epsilon$$

Choix : Comme c'est pour tout ϵ positif, on prend $\epsilon = \eta > 0$,
où η vérifie l'assertion 1.

Donc

$$\exists \delta \in (0, 1) \text{ tel que } \forall t_{n_j}, t \in (t_0, \infty) : |t - t_{n_j}| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(t_{n_j})| < \epsilon$$

où

1. $|t - t_{n_j}| < \delta$:
donc $t \in (t_{n_j} - \delta, t_{n_j} + \delta)$
2. $|x(t) - x(t_{n_j})| < \epsilon$:

$$\text{Ce qui entraine : } \epsilon > |x(t) - x(t_{n_j})| \geq ||x(t)| - |x(t_{n_j})||$$

$$\text{ou encore } ||x(t)| - |x(t_{n_j})|| < \epsilon$$

Ce qui s'écrit comme $-\epsilon < |x(t)| - |x(t_{nj})| < \epsilon$

ou de façon équivalente $-\epsilon + |x(t_{nj})| < |x(t)| < \epsilon + |x(t_{nj})|$

On a donc : $|x(t)| > \underbrace{|x(t_{nj})|}_{\geq 2\eta} - \epsilon$

Comme $\epsilon = \eta$, on a : $|x(t)| > \eta$

3. Conclusion :

Alors, comme par 2. $|x(t)| \geq \eta, \forall t \in (t_{nj} - \delta, t_{nj} + \delta)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{\infty} |x(t)|^2 dt &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t_{nj}-\delta}^{t_{nj}+\delta} |x(t)|^2 dt \\
 &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t_{nj}-\delta}^{t_{nj}+\delta} \eta^2 dt \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \eta^2 \int_{t_{nj}-\delta}^{t_{nj}+\delta} dt \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \eta^2 (t_{nj} + \delta - t_{nj} + \delta) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} 2\delta \eta^2 \\
 &= \infty
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mais par hypothèse $x \in L_n^2$, c'est à dire

$$\int_{t_0}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \tag{3.9}$$

Par conséquent : (3.8) et (3.9) sont en contradiction, donc il faut rejeter l'hypothèse ayant été faite au début que $x(t) \not\rightarrow 0$, ce qui entraîne que :

$$x(t) \longrightarrow 0 \text{ (quand } t \longrightarrow \infty \text{)}.$$

□

Theorème 3.2.1

Si \exists des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\pi(t, x, u) \geq \alpha x^T Lx + \beta u^T Qu \quad (3.10)$$

*Alors le contrôle optimal de la partie linéaire u_L^0 ,
donné par (3.5.), est le contrôle optimal pour R .*

Preuve :

1^{ere} Etape :

$$V(x_0, t_0, \infty, u) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} (u + Q^{-1} B^T P x)^T Q (u + Q^{-1} B^T P x) dt - x(t_1)^T P x(t_1) \right) + x_0^T P x_0 \quad (3.11)$$

Pour les détails de calcul, voir Annexe A.

2^{ieme} Etape : $V(x_0, t_0, \infty, u_L^0) \leq x_0^T P x_0 < \infty$

En remplaçant le resultat (3.5) : $u_L^0 = -Q^{-1} B^T P x$ dans l'égalité (3.11), on a :

$$\begin{aligned} V(x_0, t_0, \infty, u_L^0) &= - \underbrace{\lim_{t_1 \rightarrow \infty} (x(t_1)^T P x(t_1))}_{\geq 0 \text{ (car } P > 0)} + x_0^T P x_0 \\ &\leq x_0^T P x_0 < \infty \end{aligned} \quad (3.12)$$

3^{ieme} Etape : Le coût $\in \overline{\mathbb{R}}_+$ et son infimum existent.

Par la condition (3.10) : $\pi(t, x, u) \geq \alpha x^T Lx + \beta u^T Qu$,
on obtient :

$$V(x_0, t_0, \infty, u) = \int_{t_0}^{\infty} \pi(t, x, u) dt$$

Par monotonie de l' intégrale, on obtient :

$$\geq \int_{t_0}^{\infty} (\alpha x^T L x + \beta u^T Q u) dt$$

Comme (α, β, L, Q) sont strictement positives), on obtient :

$$\geq 0$$

(3.13)

Ceci implique que :

1. $V(x_0, t_0, \infty, u) \geq 0$, c'est à dire le coût $\in \overline{\mathbb{R}}_+$.
2. $V(x_0, t_0, \infty, u) \geq 0$, c'est à dire le coût est borné inférieurement, c'est à dire l'infimum du coût existe.
donc :

$$0 \leq \inf_{u \in \mathcal{U}} (V(x_0, t_0, \infty, u)) \leq V(x_0, t_0, \infty, u_L^0) \leq x_0^T P x_0 < \infty \quad (3.14)$$

4^{ieme} Etape : x est uniformément continue sur $[t_0, \infty)$:

Il est nécessaire de montrer ceci, pour pouvoir utiliser le Lemme 3.2.1.

En effet :

1. Posons $F := \{u \in \mathcal{U} : V(x_0, t_0, \infty, u) < \infty\} \in \mathcal{U}$
 $F \neq \emptyset$, car par (3.12) : $V(x_0, t_0, \infty, u_L^0) < \infty$, c.à.d. $u_L^0 \in F$.
2. $0 \leq \inf_{u \in \mathcal{U}} (V(x_0, t_0, \infty, u)) = \inf_{u \in F} (V(x_0, t_0, \infty, u)) \leq x_0^T P x_0$
 $\inf_{u \in \mathcal{U}} V = \inf_{u \in F} V$
car : $\mathcal{U} = F +$ des coûts infinis.
comme $\inf_{u \in \mathcal{U}} < \infty$ par (3.14) et $\inf_{u \in F} < \infty$ par 1.
→ Comme l'infimum sur \mathcal{U} est borné, et donc différent de l'infini,
on a que les infimums sur \mathcal{U} et F sont égaux.

3. $F \subset \{u \in \mathcal{U} : u \in L^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^m), x \in L^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^n)\}$:

• *Rappels*

$$(a) \quad u \in L^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow \int_{t_0}^{\infty} \|u(t)\|^2 dt < \infty$$

$$(b) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} := (\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

En effet

(a) On a que $u \in F$, donc :

$$\infty > V(x_0, t_0, \infty, u) = \int_{t_0}^{\infty} \pi(t, x, u) dt$$

Par monotonie de l'intégrale et l'hypothèse (3.10), on a :

$$\geq \int_{t_0}^{\infty} (\alpha x^T L x + \beta u^T Q u) dt$$

$$= \alpha \int_{t_0}^{\infty} (x^T L x) dt + \beta \int_{t_0}^{\infty} (u^T Q u) dt$$

$$\text{Comme } Q = Q^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} = Q^T > 0 \Rightarrow Q^{\frac{1}{2}} = (Q^{\frac{1}{2}})^T > 0$$

$$\text{Comme } L = L^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} = L^T > 0 \Rightarrow L^{\frac{1}{2}} = (L^{\frac{1}{2}})^T > 0, \text{ on a :}$$

$$= \alpha \int_{t_0}^{\infty} (x^T (L^{\frac{1}{2}})^T L^{\frac{1}{2}} x) dt + \beta \int_{t_0}^{\infty} (u^T (Q^{\frac{1}{2}})^T Q^{\frac{1}{2}} u) dt$$

$$= \alpha \int_{t_0}^{\infty} \|L^{\frac{1}{2}} x\|^2 dt + \beta \int_{t_0}^{\infty} \|Q^{\frac{1}{2}} u\|^2 dt$$

(3.15)

Ceci implique que :

$$\infty > \alpha \int_{t_0}^{\infty} \|L^{\frac{1}{2}} x\|^2 dt + \beta \int_{t_0}^{\infty} \|Q^{\frac{1}{2}} u\|^2 dt$$

ou encore

$$\alpha \int_{t_0}^{\infty} \|L^{\frac{1}{2}} x\|^2 dt < \infty \quad \text{et} \quad \beta \int_{t_0}^{\infty} \|Q^{\frac{1}{2}} u\|^2 dt < \infty$$

Comme α et β sont des constantes positives, on a :

$$\int_{t_0}^{\infty} \|L^{\frac{1}{2}} x\|^2 dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^{\infty} \|Q^{\frac{1}{2}} u\|^2 dt < \infty$$

Par définition de L^2 , ceci signifie que :

$$(L^{\frac{1}{2}} x) \in L^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad (Q^{\frac{1}{2}} u) \in L^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^m).$$

(b) $\star x \in L^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^n) := L_n^2$

En effet

En utilisant le fait que $L^{\frac{1}{2}}x \in L_n^2$, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{\infty} \|x\|^2 dt &= \int_{t_0}^{\infty} \|L^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} x\|^2 dt \\
 &\leq \int_{t_0}^{\infty} \|L^{-\frac{1}{2}}\|^2 \|L^{\frac{1}{2}} x\|^2 dt \\
 &= \underbrace{\|L^{-\frac{1}{2}}\|^2}_{<\infty} \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} \|L^{\frac{1}{2}} x\|^2 dt}_{<\infty} \\
 &< \infty
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$\star u \in L^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^m) := L_m^2$

En effet

En utilisant le fait que $Q^{\frac{1}{2}}x \in L_m^2$, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{\infty} \|u\|^2 dt &= \int_{t_0}^{\infty} \|Q^{-\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} u\|^2 dt \\
 &\leq \int_{t_0}^{\infty} \|Q^{-\frac{1}{2}}\|^2 \|Q^{\frac{1}{2}} u\|^2 dt \\
 &= \underbrace{\|Q^{-\frac{1}{2}}\|^2}_{<\infty} \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} \|Q^{\frac{1}{2}} u\|^2 dt}_{<\infty} \\
 &< \infty
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

4. $\dot{x} \in L_n^2, \forall u \in F :$

en effet

Par l'équation (3.1), on a :

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(t, x, u)$$

En majorant la norme de ceci, on a :

$$\begin{aligned}
\| \dot{x} \| &= \| Ax + Bu + f(t, x, u) \| \\
&\leq \| Ax \| + \| Bu \| + \| f \| \\
&\quad \text{En utilisant la majoration de la norme de } f, \text{ on obtient :} \\
&\leq \| A \| \| x \| + \| B \| \| u \| + \epsilon \| x \| + \eta \| u \| \\
&= (\| A \| + \epsilon) \| x \| + (\| B \| + \eta) \| u \|.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

En élevant la norme au carré, on garde la majoration suivante :

$$\| \dot{x} \|^2 \leq ((\| A \| + \epsilon) \| x \| + (\| B \| + \eta) \| u \|^2$$

[On sait par 4. que $x \in L_n^2$ et $u \in L_m^2$.
Ceci entraîne que : $\| x \| \in L_n^2$ et $\| u \| \in L_m^2$.
Comme L^2 est un espace linéaire, on a que
[$(\| A \| + \epsilon) \| x \| + (\| B \| + \eta) \| u \| \in L^2$

Par monotonie de l'intégrale, on obtient :

$$\int_{t_0}^{\infty} \| \dot{x} \|^2 dt \leq \int_{t_0}^{\infty} ((\| A \| + \epsilon) \| x \| + (\| B \| + \eta) \| u \|^2 dt$$

[On vient de voir que : $(\| A \| + \epsilon) \| x \| + (\| B \| + \eta) \| u \| \in L^2$.
[Par définition de L^2 on a donc :

$$< \infty \tag{3.19}$$

Comme l'intégrale de la norme de \dot{x} au carré est finie, on a par définition de L_n^2 que : $\dot{x} \in L_n^2$.

5. Conclusion : x est uniformément continue :

En effet

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau \\
x(t+h) - x(t) &= \int_t^{t+h} \dot{x}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

En majorant la norme de cette différence, on obtient :

$$\begin{aligned}
\| x(t+h) - x(t) \| &= \left\| \int_t^{t+h} \dot{x}(\tau) d\tau \right\| \\
&\leq \int_t^{t+h} \| \dot{x}(\tau) \| d\tau \\
&= \int_t^{t+h} \| \dot{x}(\tau) \| 1 d\tau \\
&\quad \text{Sous le produit scalaire, on a :} \\
&= \langle \| \dot{x}(\cdot) \|, 1 \rangle_{L^2(t, t+h)} \\
&\quad \text{En utilisant Cauchy - Schwarz, ça donne :} \\
&\leq \| \dot{x}(\cdot) \|_{L^2(t, t+h)} \| 1 \|_{L^2(t, t+h)} \\
&\quad \text{En se servant de la norme de } L^2, \text{ on obtient :} \\
&= \left(\int_t^{t+h} \| \dot{x}(\tau) \|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+h} 1 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \| \dot{x} \|_2 \sqrt{|h|}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) : |h| < \delta \Rightarrow \|x(t+h) - x(t)\| \leq \| \dot{x} \|_2 \sqrt{|h|} \leq \underbrace{\| \dot{x} \|_2}_{< \infty \text{ car } \dot{x} \in L^2_n} \sqrt{\delta} < \epsilon$$

Cette dernière ligne signifie que x est uniformément continue.

5^{ieme} Etape : $u \in F : x(t) \rightarrow 0$ (quand $t \rightarrow \infty$)

Comme par la quatrième étape :

1. x est uniformément continue sur $[t_0, \infty)$
2. $x \in L^2_n$

Les hypothèses du Lemme 3.2.1 sont satisfaites, donc on peut conclure que $x(t) \rightarrow 0$ (quand $t \rightarrow \infty$).

6^{ieme} Etape : Conclusion

Par le résultat (3.11), on a :

$$\begin{aligned}
V(x_0, t_0, \infty, u) &= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} (u + Q^{-1} B^T P x)^T Q (u + Q^{-1} B^T P x) dt \right) \\
&\quad - \lim_{t_1 \rightarrow \infty} x(t_1)^T P x(t_1) + x_0^T P x_0 \\
&\geq - \lim_{t_1 \rightarrow \infty} x(t_1)^T P x(t_1) + x_0^T P x_0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Alors :

1. $\forall u \in F$, on a par l'étape 5 que $x(t) \rightarrow 0$. En utilisant ceci dans l'inégalité (3.21), on a :

$$V(x_0, t_0, \infty, u) \geq x_0^T P x_0$$

2. Comme $u_L^0 \in F$, on a par l'étape 5 que $x(t) \rightarrow 0$. En utilisant ceci dans le résultat (3.12), on a :

$$V(x_0, t_0, \infty, u_L^0) = x_0^T P x_0$$

Donc, le coût optimal :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} V(x_0, t_0, \infty, u) = \min_{u \in F} V(x_0, t_0, \infty, u) = x_0^T P x_0 = V(x_0, t_0, \infty, u_L^0)$$

est atteint par le contrôle optimal : u_L^0 .

□

Notes 3.2.1

1. On a défini le coût du système R par :

$$V(x_0, t_0, \infty, u) = \int_{t_0}^{\infty} \pi(t, x, u) dt$$

où π contient la fonction non linéaire et variable, f .

Et, c'est à cause de ce f , qu'on ne peut pas écrire le coût, V , comme pour le système linéaire sous forme d'une somme de carrés :

$$V_L(x_0, t_0, \infty, u) = \int_{t_0}^{\infty} \|x\|_L^2 + \|u\|_Q^2 dt$$

2. Si \exists des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$\pi(t, x, u) \geq \alpha x^T Lx + \beta u^T Qu$$

Alors $V = \sup \hat{V}(x_0, t_0, \infty, u) = \sup \int_{t_0}^{\infty} \alpha x^T Lx + \beta u^T Qu$

En effet

On a par hypothèse que $\pi(t, x, u) \geq \alpha x^T Lx + \beta u^T Qu$.

Par monotonie de l'intégrale, on obtient :

$$\int_{t_0}^{\infty} \pi(t, x, u) \geq \int_{t_0}^{\infty} \alpha x^T Lx + \beta u^T Qu$$

C'est à dire

$$V(x_0, t_0, \infty, u) \geq \int_{t_0}^{\infty} \alpha x^T Lx + \beta u^T Qu = \hat{V}(x_0, t_0, \infty, u)$$

Ce qui signifie que

$$V(x_0, t_0, \infty, u) = \sup \hat{V}(x_0, t_0, \infty, u)$$

□

3. (3.10) : \exists des constantes $\alpha, \beta > 0$, telles que $\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$\pi(t, x, u) \geq \alpha x^T Lx + \beta u^T Qu$$

Cette condition est équivalente à :

\exists des constantes $\alpha', \beta' > 0$, telles que $\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$\pi(t, x, u) \geq \alpha' x^T x + \beta' u^T u \quad (3.22)$$

où la condition (3.22) est plus simple à établir.

Corollaire 3.2.1**Si**

1. \exists des constantes $\epsilon, \eta > 0$ telles que $\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,

$$\|f(t, x, u)\| \leq \epsilon\|x\| + \eta\|u\| \quad (3.23)$$

- 2.

$$2\epsilon\lambda_{\min}(Q) + \eta^2\lambda_{\max}(P) < \frac{\lambda_{\min}(L)\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (3.24)$$

où $\lambda_{\min}(A)$ ($\lambda_{\max}(A)$) = plus petite (grande) valeur propre d'une matrice A .

Alors u_L^0 , donné par (3.5) est le contrôle optimal pour R .

Preuve :

1^{ere} Etape : $\pi \geq (\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P))\|x\|^2 - 2\eta\lambda_{\max}(P)\|x\|\|u\| + \lambda_{\min}(Q)\|u\|^2$

En effet

$$\pi(t, x, u) = x^T L x + u^T Q u - 2x^T P f$$

[En utilisant un résultat du chapitre 2,

comme $L = L^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, on a :

$$[\quad x^T L x \geq \lambda_{\min}(L)\|x\|^2 \text{ et } u^T Q u \geq \lambda_{\min}(Q)\|u\|^2$$

$$\geq \lambda_{\min}(L)\|x\|^2 + \lambda_{\min}(Q)\|u\|^2 - 2x^T P f$$

$$[\text{on a : } x^T P f \leq |x^T P f| \leq \|x\| \|P\| \|f\| \leq \|x\| \|P\| (\epsilon\|x\| + \eta\|u\|)$$

$$[\quad = \epsilon\|P\| \|x\|^2 + \eta\|P\| \|x\| \|u\|$$

$$\geq \lambda_{\min}(L)\|x\|^2 + \lambda_{\min}(Q)\|u\|^2 - 2\epsilon\|P\| \|x\|^2 - 2\eta\|P\| \|x\| \|u\| \quad (3.25)$$

[En utilisant un résultat du chapitre 2,

] comme $P = P^T > 0, \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on a que $\|P\| = \lambda_{\max}(P)$

$$= (\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P))\|x\|^2 - 2\eta\lambda_{\max}(P)\|x\|\|u\| + \lambda_{\min}(Q)\|u\|^2 \quad (3.26)$$

2^{ieme} Etape : (3.22) : $\pi \geq \alpha'\|x\|^2 + \beta'\|u\|^2$:

En effet :

L'inégalité (3.22) est vérifiée, pour des constantes $\alpha', \beta' > 0$ telles que

$$(\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P) - \alpha')(\lambda_{\min}(Q) - \beta') = \eta^2\lambda_{\max}(P)^2 \quad (3.27)$$

en effet :

Il faut trouver les constantes α', β' telles que

$$\pi(t, x, u) \geq \alpha'\|x\|^2 + \beta'\|u\|^2$$

Par l'égalité (3.26), on a :

$$\pi \geq (\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P))\|x\|^2 - 2\eta\lambda_{\max}(P)\|x\|\|u\| + \lambda_{\min}(Q)\|u\|^2$$

Si

$$(\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P))\|x\|^2 - 2\eta\lambda_{\max}(P)\|x\|\|u\| + \lambda_{\min}(Q)\|u\|^2 \geq \alpha'\|x\|^2 + \beta'\|u\|^2$$

Alors

$$\pi \geq \alpha'\|x\|^2 + \beta'\|u\|^2$$

Donc, il faut :

$$(\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P))\|x\|^2 - 2\eta\lambda_{\max}(P)\|x\|\|u\| + \lambda_{\min}(Q)\|u\|^2 - \alpha'\|x\|^2 - \beta'\|u\|^2 \geq 0$$

c'est à dire

$$(\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P) - \alpha')\|x\|^2 - 2\eta\lambda_{\max}(P)\|x\|\|u\| + (\lambda_{\min}(Q) - \beta')\|u\|^2 \geq 0.$$

Pour que cette inégalité s'écrive sous la forme suivante

$$(\sqrt{\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P) - \alpha'} \|x\| - \sqrt{\lambda_{\min}(Q) - \beta'} \|u\|)^2 \geq 0$$

il faut :

$$2\sqrt{\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P) - \alpha'}\sqrt{\lambda_{\min}(Q) - \beta'} = 2\eta\lambda_{\max}(P)$$

c'est à dire

$$(\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P) - \alpha')(\lambda_{\min}(Q) - \beta') = \eta^2\lambda_{\max}(P)^2$$

C'est à dire l'égalité (3.27) est établie.

3^{ème} Etape : Existence de constantes α' , $\beta' > 0$:

Pour montrer l'existence des constantes α' et β' positives, on va faire l'étude géométrique d'une conique.

En effet :

1. (a) Par l'hypothèse (3.24), on a :

$$2\epsilon\lambda_{\min}(Q)\lambda_{\max}(P) + \eta^2\lambda_{\max}(P)^2 < \lambda_{\min}(L)\lambda_{\min}(Q)$$

c'est à dire

$$-2\epsilon\lambda_{\min}(Q)\lambda_{\max}(P) - \eta^2\lambda_{\max}(P)^2 + \lambda_{\min}(L)\lambda_{\min}(Q) > 0$$

Notons :

$$\gamma := -2\epsilon\lambda_{\min}(Q)\lambda_{\max}(P) - \eta^2\lambda_{\max}(P)^2 + \lambda_{\min}(L)\lambda_{\min}(Q)$$

- (b) Par l'égalité (3.27), on a :

$$(\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P) - \alpha')(\lambda_{\min}(Q) - \beta') = \eta^2\lambda_{\max}(P)^2$$

En distribuant les termes, on obtient :

$$\lambda_{\min}(L)\lambda_{\min}(Q) - \beta'\lambda_{\min}(L) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P)\lambda_{\min}(Q) + 2\beta'\epsilon\lambda_{\max}(P) - \alpha'\lambda_{\min}(Q) + \alpha'\beta' = \eta^2\lambda_{\max}(P)^2$$

En y insérant γ , on obtient :

$$\gamma + 2\beta'\epsilon\lambda_{\max}(P) - \beta'\lambda_{\min}(L) - \alpha'\lambda_{\min}(Q) + \alpha'\beta' = 0$$

ou encore

$$-\lambda_{\min}(Q)\alpha' + (-\lambda_{\min}(L) + 2\epsilon\lambda_{\max}(P))\beta' + \alpha'\beta' + \gamma = 0$$

2. Equation d'une conique :

$$C = b_{11}(x^1)^2 + b_{22}(x^2)^2 + 2b_{12}x^1x^2 + c_1x^1 + c_2x^2 + d = 0$$

Dans notre cas :

$$x^1 = \alpha', x^2 = \beta', b_{11} = 0, b_{22} = 0, b_{12} = b_{21} = \frac{1}{2}, c_1 = -\lambda_{\min}(Q), \\ c_2 = -\lambda_{\min}(L) + 2\epsilon\lambda_{\max}(P), d = \gamma.$$

3. Classification de la conique :

L'équation de la conique est :

$$C(x^1, x^2) = (x^1 \ x^2)B(x^1 \ x^2)^T + (c_1 \ c_2)(x^1 \ x^2)^T + d = 0$$

$$\text{où } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{dans notre cas : } B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Les valeurs propres de B :

$$\det(\lambda I - B) = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \lambda_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

(b) Comme $\lambda_1\lambda_2 < 0$: On a une hyperbole.

Le terme indépendant devient :

$$C \equiv \begin{cases} \frac{dC}{dx^1} = 2b_{12}x^2 + c_1 = 0 \\ \frac{dC}{dx^2} = 2b_{12}x^1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations, on a :

$$x^1 = -\frac{c_2}{2b_{12}} \text{ et } x^2 = -\frac{c_1}{2b_{12}}$$

Le terme indépendant est le suivant :

$$C(-\frac{c_2}{2b_{12}}, -\frac{c_1}{2b_{12}}) = 2b_{12}\frac{c_2}{2b_{12}}\frac{c_1}{2b_{12}} - c_1\frac{c_2}{2b_{12}} - c_2\frac{c_1}{2b_{12}} + d = -\frac{c_1c_2}{2b_{12}} + d$$

(c) L'équation réduite est : $(x^1 \leftarrow x, x^2 \leftarrow y)$

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + C(c_1, c_2) = 0$$

C'est à dire

$$\frac{1}{2}x''^2 - \frac{1}{2}y''^2 - \frac{c_1c_2}{2b_{12}} + d = 0$$

En remplaçant c_1, c_2, b_{12} et d par leurs valeurs, on a :

$$\frac{1}{2}x''^2 - \frac{1}{2}y''^2 - (-\lambda_{\min}(Q)(-\lambda_{\min}(L) + 2\epsilon\lambda_{\max}(P))) + \gamma = 0$$

En remplaçant γ par sa valeur, on obtient :

$$\frac{1}{2}x''^2 - \frac{1}{2}y''^2 - \lambda_{\min}(Q)\lambda_{\min}(L) + 2\epsilon\lambda_{\max}(P)\lambda_{\min}(Q) + \lambda_{\min}(L)\lambda_{\min}(Q) - 2\epsilon\lambda_{\max}(P)\lambda_{\min}(Q) - \eta^2\lambda_{\max}(P)^2 = 0$$

Cette dernière ligne est équivalente à :

$$\frac{1}{2}x''^2 - \frac{1}{2}y''^2 - \eta^2\lambda_{\max}(P)^2 = 0$$

ou encore

$$\frac{1}{2}x''^2 - \frac{1}{2}y''^2 = \eta^2\lambda_{\max}(P)^2$$

où

$$d' = -\eta^2\lambda_{\max}(P)^2$$

On peut encore écrire l'équation réduite comme suit :

$$\frac{1}{2\eta^2\lambda_{\max}(P)^2}x''^2 - \frac{1}{2\eta^2\lambda_{\max}(P)^2}y''^2 = 1$$

avec :

$$a^2 = 2\eta^2\lambda_{\max}(P)^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}\eta\lambda_{\max}(P) = \sqrt{\frac{|d'|}{\lambda_1}}$$

et

$$b^2 = 2\eta^2 \lambda_{max}(P)^2 \Rightarrow b = \sqrt{2\eta \lambda_{max}(P)} = \sqrt{-\frac{|d'|}{\lambda_2}}$$

(d) Comme $d' = -\eta^2 \lambda_{max}(P)^2$ est négatif, on a que :

★ Pour $x(= \alpha')$ et $y(= \beta')$ très grands, la courbe s'approche des 2 droites d'équation :

$$x = \frac{a}{b} y \text{ donne ici : } \alpha' = \beta'$$

$$x = -\frac{a}{b} y \text{ donne ici : } \alpha' = -\beta'$$

★ De plus, la courbe coupe l'axe α' en les points :

$$x = a \Rightarrow \alpha' = \sqrt{2\eta} \lambda_{max}(P)$$

$$x = -a \Rightarrow \alpha' = -\sqrt{2\eta} \lambda_{max}(P)$$

★ Le graphe (*FIG 3.1*) montre qu'il existe des $\alpha', \beta' > 0$:

4^{ieme} Etape : Conclusion :

Par le troisième point de la note 3.2.1 , on a que la condition (3.22) est équivalente à la condition (3.10).

Et le Théorème 3.2.1 nous dit que sous l'hypothèse (3.10) : u_L^0 est le contrôle optimale de R .

Comme le résultat (3.22) est satisfait ici (voir 2^{ieme} étape), le reste suit.

□

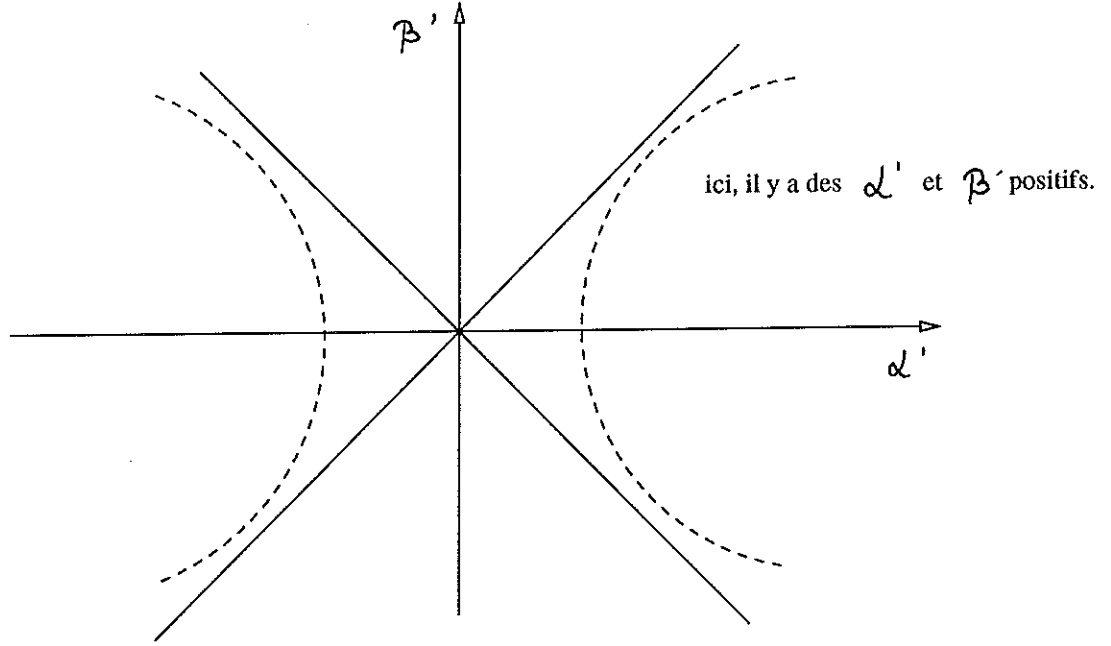


FIG. 3.1 – Existence de $\alpha', \beta' > 0$

Deuxieme cas

Une deuxième façon pour retrouver l'optimalité de la loi de contrôle (LQ) appliquée au système R , est d'augmenter le gain d'asservissement d'état. Pour cette approche, la fonction f est séparée de la manière suivante :

$$\underbrace{f(t, x, u)}_{(n,1)} = \underbrace{B}_{(n,m)} \underbrace{g(t, x, u)}_{(m,1)} + \underbrace{h(t, x)}_{(n,1)} \quad (3.28)$$

où

- $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $g, h \in C^p$
tel que g satisfait : $\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\|g(t, x, u)\| \leq \epsilon' \|x\| + \eta' \|u\| \quad (3.29)$$

où $\epsilon' > 0$

$$\text{et } 0 < \eta' < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(Q)}{(2+\epsilon)\lambda_{\max}(Q)}}, \quad \epsilon > 0$$

Pour refléter l'augmentation du gain d'asservissement d'état, on introduit un paramètre $\rho > 1$ dans :

1. le contrôle optimal :

$$u_\rho = -\rho Q^{-1} B^T P x \quad (3.30)$$

on a une augmentation, car $\|\rho Q^{-1} B^T P\| > \|Q^{-1} B^T P\|$, (car $\rho > 1$)

2. le coût :

$$V_\rho(x_0, t_0, \infty, u) = \int_{t_0}^{\infty} \pi_\rho(t, x, u) dt$$

où la fonction π_ρ est définie comme suit :

$$\pi_\rho(t, x, u) = x^T L x - 2x^T P f + (\rho - 1)x^T P B Q^{-1} B^T P x + \rho^{-1} u^T Q u \quad (3.31)$$

Théorème 3.2.2

Si \exists une constante $\zeta > 0$, telle que $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$x^T L x - 2x^T P h(t, x) \geq \zeta x^T x \quad (3.32)$$

Alors on peut choisir un nombre positif ρ tel que u_ρ , donné par (3.30), est le contrôle optimal pour (R, V_ρ) .

Preuve :

1^{ère} Partie :

On peut montrer que sous l'hypothèse (3.32) :

\exists des constantes $\alpha_\rho, \beta_\rho > 0$ telles que $\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\pi_\rho(t, x, u) \geq \alpha_\rho x^T L x + \beta_\rho u^T Q u \quad (3.33)$$

Condition qui est similaire à l'hypothèse du théorème 3.2.1

En effet :

1^{ere} Etape : Ecrire π_ρ sous une autre forme

On va montrer que :

$$\begin{aligned}\pi_\rho &= x^T Lx - 2x^T Ph - (\rho - 1)^{-1} g^T Qg \\ &\quad + (\rho - 1)^{-1} [(\rho - 1)B^T Px - Qg]^T Q^{-1} [(\rho - 1)B^T Px - Qg] + \rho^{-1} u^T Qu\end{aligned}\quad (3.34)$$

Pour les détails de calcul, voir Annexe B.

2^{ieme} Etape : (3.33) est satisfait pour ρ suffisamment grand

En effet

On vient de voir l'égalité (3.34) :

$$\begin{aligned}\pi_\rho &= x^T Lx - 2x^T Ph - (\rho - 1)^{-1} g^T Qg \\ &\quad + (\rho - 1)^{-1} [(\rho - 1)B^T Px - Qg]^T Q^{-1} [(\rho - 1)B^T Px - Qg] + \rho^{-1} u^T Qu\end{aligned}$$

1. On examine les différents termes de π_ρ , et on les minore :

(a) Par l'hypothèse (3.32), on a que $x^T Lx - 2x^T Ph \geq \zeta x^T x$

(b) $\rho^{-1} u^T Qu = \rho^{-1} u^T Qu$

(c) Comme $Q > 0$ c'est à dire $Q^{-1} > 0$ et $\rho > 1$, on a :

$$(\rho - 1)^{-1} [(\rho - 1)B^T Px - Qg]^T Q^{-1} [(\rho - 1)B^T Px - Qg] \geq 0$$

(d) $-(\rho - 1)^{-1} g^T Qg \geq -(\rho - 1)^{-1} 2\lambda_{\max}(Q)[\epsilon'^2 x^T x + \eta'^2 u^T u] :$

En effet :

$$\begin{aligned}g^T Qg &\leq |g^T Qg| \\ &\leq \|g\| \|Q\| \|g\| \\ &\quad \text{Comme } Q = Q^T > 0, \text{ ça implique que } \|Q\| = \lambda_{\max}(Q) \\ &= \lambda_{\max}(Q) \|g\|^2 \\ &\quad \text{En utilisant le résultat (3.29), on obtient :} \\ &\leq \lambda_{\max}(Q) (\epsilon' \|x\| + \eta' \|u\|)^2 \\ &= \lambda_{\max}(Q) (\epsilon'^2 \|x\|^2 + \eta'^2 \|u\|^2 + 2\epsilon'\eta' \|x\| \|u\|)\end{aligned}\quad (3.35)$$

Comme $Q > 0$, ceci entraîne que $\lambda_{\max}(Q)(\epsilon'\|x\| - \eta'\|u\|)^2 \geq 0$, donc on a :

$$\begin{aligned}
g^T Q g &\leq \lambda_{\max}(Q)(\epsilon'^2\|x\|^2 + \eta'^2\|u\|^2 + 2\epsilon'\eta'\|x\|\|u\| + (\epsilon'\|x\| - \eta'\|u\|)^2) \\
&= \lambda_{\max}(Q)(\epsilon'^2\|x\|^2 + \eta'^2\|u\|^2 + 2\epsilon'\eta'\|x\|\|u\| + \epsilon'^2\|x\|^2 + \eta'^2\|u\|^2 \\
&\quad - 2\epsilon'\eta'\|x\|\|u\|) \\
&= 2\lambda_{\max}(Q)(\epsilon'^2\|x\|^2 + \eta'^2\|u\|^2)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Comme $\rho > 1$, c'est à dire $(\rho - 1)^{-1} > 0$, on a :

$$(\rho - 1)^{-1} g^T Q g \leq (\rho - 1)^{-1} 2\lambda_{\max}(Q)(\epsilon'^2\|x\|^2 + \eta'^2\|u\|^2)$$

c'est à dire

$$-(\rho - 1)^{-1} g^T Q g \geq -(\rho - 1)^{-1} 2\lambda_{\max}(Q)(\epsilon'^2\|x\|^2 + \eta'^2\|u\|^2)$$

ce qu'il fallait montrer.

2. L'inégalité (3.33) est vérifiée :

En effet

Par le point précédent, en prenant les minoration faites sur les différents termes, on a :

$$\begin{aligned}
\pi_\rho &\geq \zeta x^T x + \rho^{-1} u^T Q u - (\rho - 1)^{-1} 2\lambda_{\max}(Q)(\epsilon'^2\|x\|^2 + \eta'^2\|u\|^2) \\
&= (\zeta - 2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2) x^T x + \rho^{-1} u^T Q u - 2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\max}(Q) \eta'^2 u^T u
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Pour avoir des termes en $x^T L x$ et $u^T Q u$, il faut faire :

(a) Comme L est une matrice réelle et symétrique, on a :

$$\lambda_{\min}(L) x^T x \leq x^T L x \leq \lambda_{\max}(L) x^T x$$

$$\text{Ce qui entraîne que } x^T x \geq \frac{x^T L x}{\lambda_{\max}(L)}$$

donc :

$$(\zeta - 2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2) x^T x \geq (\zeta - 2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2) \frac{x^T L x}{\lambda_{\max}(L)}$$

si

$$\zeta - 2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2 > 0$$

Ce qui est équivalent à

$$\zeta > 2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2$$

ou encore

$$(\rho - 1) > 2\zeta^{-1} \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2$$

Cette dernière ligne s'écrit encore comme :

$$\rho > 1 + 2\zeta^{-1} \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2 \quad (\clubsuit)$$

$$(b) (*) \lambda_{\max}(Q) \eta'^2 < \lambda_{\max}(Q) \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(Q)}{(2+\epsilon)\lambda_{\max}(Q)}} \right)^2 = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2+\epsilon}$$

Comme $(\rho - 1)^{-1} > 0$, on a :

$$-2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\max}(Q) \eta'^2 u^T u > -2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\min}(Q) \frac{1}{2+\epsilon} u^T u$$

(*) Comme Q est une matrice réelle et symétrique, on a

$$\lambda_{\min}(Q) u^T u \leq u^T Q u \leq \lambda_{\max}(Q) u^T u$$

Ceci entraîne que $u^T u \leq \frac{u^T Q u}{\lambda_{\min}(Q)}$

donc :

$$\begin{aligned} -2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\max}(Q) \eta'^2 u^T u &> -\frac{2}{2+\epsilon} (\rho - 1)^{-1} \lambda_{\min}(Q) \frac{u^T Q u}{\lambda_{\min}(Q)} \\ &= -\frac{2}{2+\epsilon} \frac{u^T Q u}{(\rho - 1)} \end{aligned}$$

Conclusion de (a) et (b) : Par le résultat (3.37), en y minorant les différents termes, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_\rho &\geq (\zeta - 2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2) \frac{x^T L x}{\lambda_{\max}(L)} + \rho^{-1} u^T Q u \\ &\quad - \frac{2}{2+\epsilon} \frac{u^T Q u}{(\rho - 1)} \\ &= (\zeta - 2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2) \frac{x^T L x}{\lambda_{\max}(L)} \\ &\quad + \left(\rho^{-1} - \frac{2}{2+\epsilon} \frac{1}{\rho - 1} \right) u^T Q u \end{aligned} \tag{3.38}$$

Prenons :

$\alpha_\rho := (\zeta - 2(\rho - 1)^{-1} \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2)^{\frac{1}{\lambda_{\max}(L)}}$ est positive si (\clubsuit) est satisfaite.

$$\beta_\rho := \rho^{-1} - \frac{2}{2+\epsilon} \frac{1}{\rho-1}$$

Alors $\beta_\rho > 0$

\Leftrightarrow

$$\rho^{-1} > \frac{2}{2+\epsilon} \frac{1}{\rho-1}$$

\Leftrightarrow

$$1 - \frac{1}{\rho} > \frac{2}{2+\epsilon}$$

\Leftrightarrow

$$\rho > \frac{1}{1 - \frac{2}{2+\epsilon}} \quad (\clubsuit\clubsuit)$$

Donc : Choisir $\rho > 1$ suffisamment grand tel que ρ satisfait les inégalités (\clubsuit) et ($\clubsuit\clubsuit$),

c'est à dire

$$\boxed{\rho > \max\{1 + \zeta^{-1} 2 \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2, (1 - 2(2 + \epsilon)^{-1})^{-1}\}}$$

Alors : $\pi_\rho \geq \alpha_\rho x^T L x + \beta_\rho u^T Q u$

c'est à dire l'inégalité (3.33) est satisfaite.

2^{ieme} Partie :

1^{ere} Etape : On écrit le coût V_ρ sous une autre forme :

$$V_\rho = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} \rho^{-1} (u + \rho Q^{-1} B^T P x)^T Q (u + \rho Q^{-1} B^T P x) dt - x(t_1)^T P x(t_1) \right) + x_0^T P x_0 \quad (3.39)$$

Pour les détails de calcul, voir Annexe C.

2^{ieme} Etape : $V_\rho(x_0, t_0, \infty, u_\rho) \leq x_0^T P x_0$

En substituant le résultat (3.30) : $u_\rho = -\rho Q^{-1} B^T P x$ dans (3.39) , on a :

$$\begin{aligned} V_\rho(x_0, t_0, \infty, u_\rho) &= x_0^T P x_0 - \underbrace{\lim_{t_1 \rightarrow \infty} x(t_1)^T P x(t_1)}_{\geq 0 \text{ car } P > 0} \\ &\leq x_0^T P x_0 < \infty \end{aligned} \quad (3.40)$$

Comparaison avec le théorème 3.2.1 :

On compare les différents résultats obtenus avec ceux du théorème 3.2.1, afin de pouvoir utiliser la conclusion de ce dernier.

En changeant : $V \rightarrow V_\rho, \pi \rightarrow \pi_\rho, \alpha \rightarrow \alpha_\rho, \beta \rightarrow \beta_\rho, u_L^0 \rightarrow u_\rho$

On remarque que :

1. L'hypothèse (3.10) du théorème 3.2.1 est similaire à l'hypothèse (3.33)
2. Le résultat (3.11) du théorème 3.2.1 est similaire au résultat (3.39)
3. Le résultat (3.12) du théorème 3.2.1 est similaire au résultat (3.40)

Alors :

Les Etapes 3 jusqu'à 6 sont donc les mêmes que celles du théorème 3.2.1.

Conclusion :

Le coût optimal :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} V_\rho(x_0, t_0, \infty, u) = x_0^T P x_0 = V_\rho(x_0, t_0, \infty, u_\rho)$$

est atteint par le contrôle optimal u_ρ .

□

Corollaire 3.2.2

Soit $f(t, x) = Bg(t, x)$ (c'est à dire $h(t, x) = 0$)

Si \exists une constante $\zeta' > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T L x \geq \zeta' x^T x$$

Alors $\exists \rho > 0$, tel que u_ρ est le contrôle optimal de (R, V_ρ) .

Preuve :

La preuve est similaire à celle du théorème 3.2.2, sauf que $h(t, x) = 0$ et g ne dépend plus de u .

□

Notes 3.2.2

1. On choisit ρ de la même manière que dans le théorème 3.2.2 (voir la fin de la première partie de la preuve de celui-ci), mais en tenant compte du fait que la fonction g ne dépend plus de u , et que donc la norme de g est seulement bornée par $\epsilon' \|x\|$ donc, il faut choisir ρ tel que :

$$\rho > 1 + (\zeta')^{-1} \lambda_{\max}(Q) \epsilon'^2$$

2. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax + Bu + f(t, x) \\ &= Ax + Bu + Bg(t, x) \\ &= (Ax + Bg(t, x)) + Bu \end{aligned} \tag{3.41}$$

Chapitre 4

Robustesse de la stabilité du système en boucle fermée

Une fois le contrôle optimal du système non linéaire établi, on aimerait bien, qu'en perturbant légèrement ce contrôle optimal, le système perturbé soit encore stable. Donc, il faut se poser la question :

" En recouvrant la loi du contrôle optimal LQ, le système en boucle fermé, aura-t-il encore les propriétés de stabilité robuste, standard (voir corollaire 4.4.2 ou référence [8]) ? "

L'objectif est de fournir une réponse positive à la question posée.

4.1 Rappel

Dans le chapitre précédent, on avait trouvé : Pour le système (3.1) :

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(t, x, u)$$

le contrôle optimal était donné par (3.5) :

$$u_L^0 = -Q^{-1}B^T Px$$

4.2 Description de deux systèmes

On considère le système en boucle fermée :

$$\begin{aligned}\hat{R} : \dot{x} &= Ax + B(-Q^{-1}B^T Px) + f(t, x, -Q^{-1}B^T Px) \\ &= (A - BQ^{-1}B^T P)x + f(t, x, -Q^{-1}B^T Px)\end{aligned}\quad (4.1)$$

en tenant compte des perturbations que le contrôle u_L^0 peut subir.

A cause de ces perturbations possibles, on considère donc l'insertion :

1. d'un élément différentiable, variable, non linéaire :

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ tel que } \phi(t, 0) = 0$$

En vue de cette perturbation non linéaire de u_L^0 , il en résulte comme version perturbée de \hat{R} :

$$\hat{R}_\phi : \dot{x} = Ax + B\phi(t, -Q^{-1}B^T Px) + f(t, x, \phi(t, -Q^{-1}B^T Px)) \quad (4.2)$$

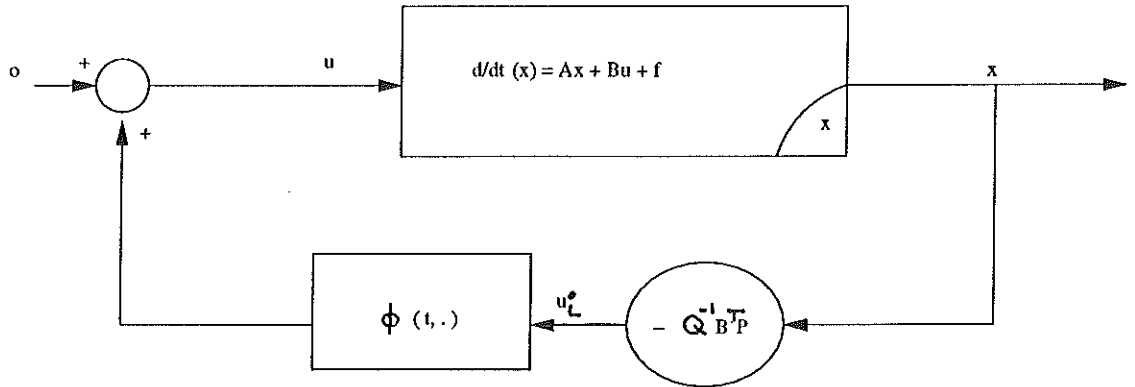


FIG. 4.1 – Système en boucle fermée : \hat{R}_ϕ

2. d'un élément stable, constant, linéaire ayant une fonction de transfert rationnel propre , c'est à dire $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}_p(s)^{m \times m}$

En vue de l'insertion de cet élément linéaire, il en résulte comme version perturbée de \hat{R} :

$$\hat{R}_G : \dot{x} = Ax + B[G * (-Q^{-1}B^T Px)] + f(t, x, [G * (-Q^{-1}B^T Px)]) \quad (4.3)$$

où

(a) $*$ est le produit de convolution

(b) $G(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{G}(s)]$

où \mathcal{L}^{-1} est l'inverse de la transformée de Laplace.

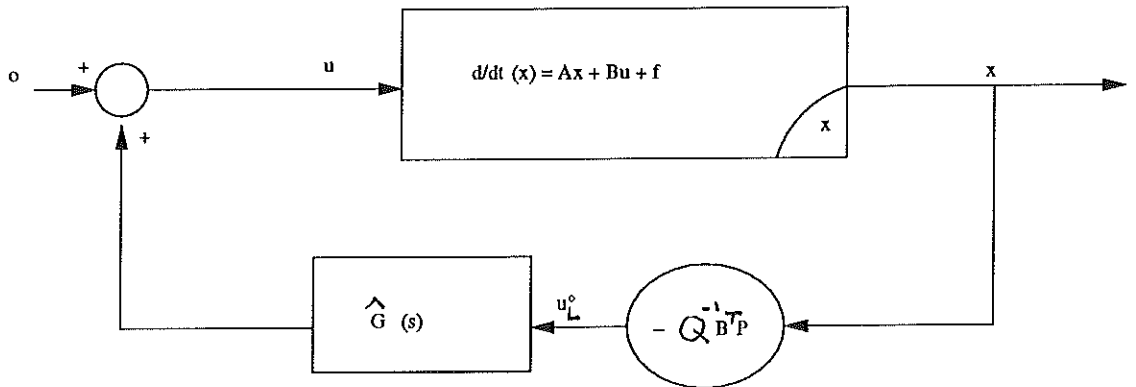


FIG. 4.2 – Système en boucle fermée : \hat{R}_G

De plus on introduit un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\alpha L - \delta P B Q^{-1} B^T P > 0 \quad (4.4)$$

Notes 4.2.1

Garantie d'existence de δ

Si

$$0 < \delta < \frac{\lambda_{\min}(\alpha L)}{\|PBQ^{-1}B^T P\|} \quad (\diamond).$$

Alors il existe un nombre positif δ vérifiant l'inégalité (4.4).

En effet

On peut réécrire l'hypothèse (\diamond) sous la forme suivante

$$\delta \|PBQ^{-1}B^T P\| < \lambda_{\min}(\alpha L).$$

Comme on a que $\|PBQ^{-1}B^T P\| \geq \lambda_{\max}(PBQ^{-1}B^T P)$ et δ positif, on a que

$$\delta \lambda_{\max}(PBQ^{-1}B^T P) < \lambda_{\min}(\alpha L).$$

En multipliant les deux côtés par $\|x\|^2 \geq 0$, on obtient :

$$\delta \lambda_{\max}(PBQ^{-1}B^T P) \|x\|^2 < \lambda_{\min}(\alpha L) \|x\|^2.$$

On a que :

1. Comme αL est réelle et symétrique (car L est symétrique), on a :

$$\lambda_{\min}(\alpha L) \|x\|^2 \leq x^T \alpha L x.$$

2. Comme $PBQ^{-1}B^T P$ est réelle et symétrique, on a :

$$\lambda_{\max}(PBQ^{-1}B^T P) \|x\|^2 \geq x^T PBQ^{-1}B^T P x.$$

En utilisant ces deux résultats, on obtient

$$\delta x^T PBQ^{-1}B^T P x \leq \delta \lambda_{\max}(PBQ^{-1}B^T P) \|x\|^2 \leq \lambda_{\min}(\alpha L) \|x\|^2 \leq x^T \alpha L x$$

c'est à dire

$$\delta x^T PBQ^{-1}B^T P x \leq x^T \alpha L x.$$

En mettant les termes d'un même côté, on obtient :

$$x^T(\alpha L - \delta PBQ^{-1}B^T P)x > 0.$$

Cette dernière inégalité signifie que la matrice $\alpha L - \delta PBQ^{-1}B^T P$ est définie positive. Par définition d'une matrice définie positive, on a :

$$\alpha L - \delta PBQ^{-1}B^T P > 0.$$

Donc, en partant de l'hypothèse (\diamond), on aboutit bien à l'inégalité (4.4).

4.3 Stabilité des deux systèmes

Pour le premier système (4.2), on a :

Theorème 4.3.1 (Stabilité de \hat{R}_ϕ)

Si \exists des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (3.10) :$$

$$\pi(t, x, u) \geq \alpha x^T Lx + \beta u^T Qu$$

Alors $x = 0$ est un équilibre uniformément asymptotiquement stable du système \hat{R}_ϕ , $\forall \phi(t, u)$ non linéaire vérifiant :

$$\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$[\phi(t, u) - u]^T Q[\phi(t, u) - u] \leq \beta \phi^T(t, u) Q \phi(t, u) + \delta u^T Qu \quad (4.5)$$

où le nombre δ doit vérifier l'inégalité (4.4) et β doit satisfaire l'hypothèse (3.10).

Preuve :

1. On peut écrire l'hypothèse (4.5) sous la forme suivante :

$$(1 - \beta)\phi^T Q \phi + (1 - \delta)u^T Qu - 2\phi^T Qu \leq 0 \quad , \quad (*)$$

En effet

Soit l'hypothèse (4.5)

$$\phi^T Q \phi - \phi^T Q u - u^T Q \phi + u^T Q u \leq \beta \phi^T Q \phi + \delta u^T Q u$$

qui est équivalente à

$$(1 - \beta) \phi^T Q \phi + (1 - \delta) u^T Q u - \phi^T Q u - (\phi^T Q u)^T \leq 0$$

Comme $\phi^T Q u \in \mathbb{R}$, on a que $\phi^T Q u = (\phi^T Q u)^T$, en utilisant ceci, on a que la dernière inégalité est équivalente à

$$(1 - \beta) \phi^T Q \phi + (1 - \delta) u^T Q u - 2 \phi^T Q u \leq 0 \quad , \quad (\star)$$

2. Considérons la forme quadratique suivante :

$$w(x) = x^T P x \quad (4.6)$$

3. Calculons la dérivée de w le long des trajectoires du système (4.2)

$$\begin{aligned} \dot{w}(x) &\leq -x^T (\alpha L - \delta P B Q^{-1} B^T P) x + (1 - \beta) \phi^T Q \phi - 2 \phi^T Q u_L^0 \\ &\quad + (1 - \delta) (u_L^0)^T Q u_L^0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pour les détails de calcul, voir Annexe D.

4. $w(x) > 0$, $\dot{w}(x) < 0$:

En effet

(a) $w(x) = x^T P x > 0$, car P est défini positif

(b) Par le résultat (4.7) :

$$\begin{aligned} \dot{w}(x) &\leq -x^T (\alpha L - \delta P B Q^{-1} B^T P) x \\ &\quad + (1 - \beta) \phi^T Q \phi - 2 \phi^T Q u_L^0 + (1 - \delta) (u_L^0)^T Q u_L^0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

< 0

car :

$$\text{i. } -x^T \underbrace{(\alpha L - \delta P B Q^{-1} B^T P)}_{> \text{ par (4.4)}} x < 0$$

$$\text{ii. } (1 - \beta)\phi^T Q \phi - 2\phi^T Q u_L^0 + (1 - \delta)(u_L^0)^T Q u_L^0 < 0 \text{ par } (\star)$$

5. Conclusion :

Vérification des hypothèses du théorème de stabilité asymptotique.

(a) Il existe une fonction V ldp.

On définit : $V(t, x) = tw(x) = w(x) = x^T P x$

en effet,

La fonction continue $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est ldp, car

- i. $V(t, 0) = w(0) = 0$, ce qui est satisfait.
- ii. $\exists w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ldp et $\exists r > 0$ telles que $V(t, x) = w(x)$
- iii. La fonction continue w est ldp, car $w(x) = x^T P x$ est définie positive ($P = P^T > 0$)

(b) La fonction V est décroissante :

en effet :

$$V(t, x) = x^T P x = \|P^{\frac{1}{2}} x\|^2 \leq \|P^{\frac{1}{2}}\|^2 \|x\|^2 \quad \forall x$$

(c) La fonction continue $-\dot{V}$ est ldp :

en effet :

- i. $-\dot{V}(t, 0) = -\dot{w}(0) = 0$, ce qui est satisfait.
- ii. $\exists -\dot{w} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ldp et $\exists r > 0$ telles que $-\dot{V}(t, x) = -\dot{w}(x)$
- iii. La fonction continue $-\dot{w}$ est ldp, car :
 - A. $-\dot{w}(0) = 0$
 - B. $\dot{w}(x) < 0$ par (4.8), ce qui entraîne que $-\dot{w}(x) > 0 \quad \forall x$

Les hypothèses du théorème 2.3.1 sont satisfaites, donc $x = 0$ est un équilibre uniformément asymptotiquement stable du système \hat{R}_ϕ

□

Pour le deuxième système (4.3), on a :

Theorème 4.3.2 (Stabilité de \hat{R}_G)

Si \exists des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (3.10) :$$

$$\pi(t, x, u) \geq \alpha x^T Lx + \beta u^T Qu$$

Alors $x = 0$ est un équilibre uniformément asymptotiquement stable du système \hat{R}_G , pour toute perturbation stable, constant, linéaire ayant comme fonction de transfert $\hat{G}(s)$, vérifiant :
 $\forall w \in \mathbb{R}$

$$\beta \hat{G}^*(jw) Q \hat{G}(jw) + \delta Q \geq [\hat{G}^*(jw) - I] Q [\hat{G}(jw) - I] \quad (4.9)$$

- où 1. $*$ est la conjuguée transposée.
2. Le nombre δ doit vérifier l'inégalité (4.4).
3. β doit satisfaire l'hypothèse (3.10).

Preuve :

1. L'hypothèse (4.9) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2\pi} (\|Q^{\frac{1}{2}}[\hat{G} - I]\widehat{u_L^0}\|_2^2 - \beta \|Q^{\frac{1}{2}}(\hat{G}\widehat{u_L^0})\|_2^2 - \delta \|Q^{\frac{1}{2}}\widehat{u_L^0}\|_2^2) \leq 0 \quad , \quad (\star\star)$$

En effet

Soit l'hypothèse (4.9)

$$\beta \hat{G}^*(jw) Q \hat{G}(jw) + \delta Q \geq [\hat{G}^*(jw) - I] Q [\hat{G}(jw) - I]$$

qui est équivalente à :

$$\beta \hat{G}^*(jw) Q \hat{G}(jw) + \delta Q \geq [\hat{G}(jw) - I]^* Q [\hat{G}(jw) - I].$$

En pré - et postmultipliant cette dernière inégalité respectivement par $(\widehat{u_L^0})^*$ et $\widehat{u_L^0}$, on a $\forall w \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & (\widehat{u_L^0})^*(jw)[\beta\widehat{G}^*(jw)Q\widehat{G}(jw) + \delta Q]\widehat{u_L^0}(jw) \\ & \geq (\widehat{u_L^0})^*(jw)[\widehat{G}(jw) - I]^*Q[\widehat{G}(jw) - I]\widehat{u_L^0}(jw). \end{aligned}$$

Ce qui est equivalent à

$$\begin{aligned} & \beta(\widehat{u_L^0})^*(jw)\widehat{G}^*(jw)Q\widehat{G}(jw)\widehat{u_L^0}(jw) + \delta(\widehat{u_L^0})^*(jw)Q\widehat{u_L^0}(jw) \\ & \geq (\widehat{u_L^0})^*(jw)[\widehat{G}(jw) - I]^*Q[\widehat{G}(jw) - I]\widehat{u_L^0}(jw). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est encore équivalent à :

$$\begin{aligned} & \beta(\widehat{G}(jw)\widehat{u_L^0}(jw))^*Q(\widehat{G}(jw)\widehat{u_L^0}(jw)) + \delta(\widehat{u_L^0})^*(jw)Q\widehat{u_L^0}(jw) \\ & \geq [(\widehat{G}(jw) - I)\widehat{u_L^0}(jw)]^*Q[\widehat{G}(jw) - I]\widehat{u_L^0}(jw) \end{aligned}$$

ou encore

$$\beta\|Q^{\frac{1}{2}}(\widehat{G}(jw)\widehat{u_L^0}(jw))\|_2^2 + \delta\|Q^{\frac{1}{2}}\widehat{u_L^0}(jw)\|_2^2 \geq \|Q^{\frac{1}{2}}[\widehat{G}(jw) - I]\widehat{u_L^0}(jw)\|_2^2$$

Par monotonie de l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (\beta\|Q^{\frac{1}{2}}(\widehat{G}(jw)\widehat{u_L^0}(jw))\|_2^2)dw + \int_{-\infty}^{\infty} (\delta\|Q^{\frac{1}{2}}\widehat{u_L^0}(jw)\|_2^2)dw \\ & \geq \int_{-\infty}^{\infty} (\|Q^{\frac{1}{2}}[\widehat{G}(jw) - I]\widehat{u_L^0}(jw)\|_2^2)dw. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$\beta\|Q^{\frac{1}{2}}\widehat{G}\widehat{u_L^0}\|_2^2 + \delta\|Q^{\frac{1}{2}}\widehat{u_L^0}\|_2^2 \geq \|Q^{\frac{1}{2}}[\widehat{G} - I]\widehat{u_L^0}\|_2^2$$

ou encore

$$\frac{1}{2\pi}(\|Q^{\frac{1}{2}}[\widehat{G} - I]\widehat{u_L^0}\|_2^2 - \beta\|Q^{\frac{1}{2}}\widehat{G}\widehat{u_L^0}\|_2^2 - \delta\|Q^{\frac{1}{2}}\widehat{u_L^0}\|_2^2) \leq 0 \quad , \quad (**)$$

2. Considérons la forme quadratique suivante :

$$w(x) = x^T P x$$

3. Calculons $\dot{w}(x)$:

(a) $\dot{w}(x) = \frac{d}{dt}w(x) = \frac{d}{dt}x^T Px$

En prenant l'intégrale de la dérivée de w le long des trajectoires du système (4.3), on a :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \dot{w}(x) d\tau &= \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} w(x) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} (x^T Px) d\tau \\ &= [x^T Px]_{t_0}^t \\ &= x^T Px - x_0^T Px_0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

(b) En utilisant les résultats (3.4), (3.5), (3.10) et (4.3), on obtient, par le même calcul que dans le théorème 4.3.1, mais en remplaçant $\phi(t, u_L^0)$ par $(G * u_L^0)$:

$$\begin{aligned} \dot{w}(x) &\leq -x^T (\alpha L - \delta PBQ^{-1} B^T P) x + (1 - \beta) (G * u_L^0)^T Q (G * u_L^0) \\ &\quad - 2(G * u_L^0)^T Q u_L^0 + (1 - \delta) (u_L^0)^T Q u_L^0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

(c) En combinant les points (a) et (b), et par monotonie de l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} x^T Px - x_0^T Px_0 &= \int_{t_0}^t \dot{w}(x) d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t -x^T (\alpha L - \delta PBQ^{-1} B^T P) x d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t [(1 - \beta) (G * u_L^0)^T Q (G * u_L^0) - 2(G * u_L^0)^T Q u_L^0 \\ &\quad + (1 - \delta) (u_L^0)^T Q u_L^0] d\tau \\ &:= (I) + (II) \end{aligned} \quad (4.12)$$

4. Majoration de (I) et (II) :

(a) Majoration de (I) :

$$\begin{aligned} (I) &:= - \int_{t_0}^t x^T \underbrace{(\alpha L - \delta PBQ^{-1} B^T P)}_{>0 \text{ par (4.4)}} x d\tau \\ &< 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

(b) Majoration de (II) :

$$\begin{aligned}
(II) &:= \int_{t_0}^t [(1-\beta)(G * u_L^0)^T Q(G * u_L^0) - 2(G * u_L^0)^T Q u_L^0 \\
&\quad + (1-\delta)(u_L^0)^T Q u_L^0] d\tau \\
&= \int_{t_0}^t [(G * u_L^0)^T Q(G * u_L^0) - 2(G * u_L^0)^T Q u_L^0 + (u_L^0)^T Q u_L^0] \\
&\quad - \beta(G * u_L^0)^T Q(G * u_L^0) - \delta(u_L^0)^T Q u_L^0] d\tau \\
&= \int_{t_0}^t (\|Q^{\frac{1}{2}}(G * u_L^0) - Q^{\frac{1}{2}}u_L^0\|^2 \\
&\quad - \beta\|Q^{\frac{1}{2}}(G * u_L^0)\|^2 - \delta\|Q^{\frac{1}{2}}u_L^0\|^2) d\tau \\
&:= (a) + (b) + (c)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

On va majorer (a), (b) et (c) à l'aide de l'inégalité de Parseval, qui est la suivante :

$$\int_0^\infty \|f\|^2 dt = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_2^2$$

i. Majoration de (a) :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \|Q^{\frac{1}{2}}(G * u_L^0) - Q^{\frac{1}{2}}u_L^0\|^2 d\tau &= \int_{t_0}^t \|Q^{\frac{1}{2}}[(G * u_L^0) - u_L^0]\|^2 d\tau \\
&\leq \int_0^\infty \|Q^{\frac{1}{2}}[(G * u_L^0) - u_L^0]\|^2 d\tau
\end{aligned}$$

En appliquant Parseval, on a :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}[(G * \widehat{u_L^0}) - \widehat{u_L^0}]\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}[(G * \widehat{u_L^0}) - \widehat{u_L^0}]\|_2^2
\end{aligned}$$

Par linéarité du chapeau, on a

$$= \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}[(G * \widehat{u_L^0}) - \widehat{u_L^0}]\|_2^2$$

Comme : $(\widehat{f * g}) = \widehat{f} \widehat{g}$, on a :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}[\widehat{G} \widehat{u_L^0} - \widehat{u_L^0}]\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}[\widehat{G} - I] \widehat{u_L^0}\|_2^2
\end{aligned}$$

(4.15)

ii. Majoration de (b) :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t -\beta \|Q^{\frac{1}{2}}(G * u_L^0)\|^2 d\tau &\leq \int_0^\infty -\beta \|Q^{\frac{1}{2}}(G * u_L^0)\|^2 d\tau \\
&\quad \text{En utilisant Parseval, on a :} \\
&= -\beta \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}(\widehat{G * u_L^0})\|_2^2 \\
&= -\beta \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}(\widehat{G} \widehat{u_L^0})\|_2^2 \\
&= -\beta \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}(\widehat{G} \widehat{u_L^0})\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.16}$$

iii. Majoration de (c)

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t -\delta \|Q^{\frac{1}{2}}u_L^0\|^2 d\tau &\leq \int_0^\infty -\delta \|Q^{\frac{1}{2}}u_L^0\|^2 d\tau \\
&\quad \text{En utilisant Parseval, on a :} \\
&= -\delta \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}\widehat{u_L^0}\|_2^2 \\
&= -\delta \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}\widehat{u_L^0}\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Donc, en utilisant les résultats (4.15), (4.16) et (4.17), on peut majorer (II) par :

$$\begin{aligned}
(II) &:= (a) + (b) + (c) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}[\widehat{G} - I]\widehat{u_L^0}\|_2^2 - \beta \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}(\widehat{G} \widehat{u_L^0})\|_2^2 - \delta \frac{1}{2\pi} \|Q^{\frac{1}{2}}\widehat{u_L^0}\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} [\|Q^{\frac{1}{2}}[\widehat{G} - I]\widehat{u_L^0}\|_2^2 - \beta \|Q^{\frac{1}{2}}(\widehat{G} \widehat{u_L^0})\|_2^2 - \delta \|Q^{\frac{1}{2}}\widehat{u_L^0}\|_2^2] \\
&\leq 0 \quad \text{par la condition } (**).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

5. Conclusion :

(a)

$$\begin{aligned}
 x^T P x - x_0^T P x_0 &= \int_{t_0}^t \dot{w}(x) d\tau \quad (\text{par le résultat (4.10)}) \\
 &\leq (I) + (II) \quad (\text{par le résultat (4.12)}) \\
 &\leq 0 + 0 \quad (\text{par les résultats (4.13) et (4.18)})
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

On a donc que : $x^T P x - x_0^T P x_0 \leq 0$

c'est à dire $x^T P x \leq x_0^T P x_0 \quad \forall t \geq t_0$.

Ce qui signifie que $x^T P x (= w(x))$ est décroissant.

Ce qui s'exprime comme : $\dot{w}(x) < 0$

(b) Comme $w(x) > 0$ et $\dot{w}(x) < 0$,

on peut utiliser la conclusion du théorème 4.3.1, et donc $x = 0$ est un équilibre uniformément asymptotiquement stable du système \hat{R}_G .

□

4.4 Stabilité en termes de marges de gain et de phase :

Les théorèmes 4.3.1 et 4.3.2 impliquent les propriétés de robustesse classique du contrôle optimal.

Dans la suite, au lieu d'écrire que " $x = 0$ est un équilibre uniformément asymptotiquement stable du système \hat{R}_ϕ ou \hat{R}_G ", on dira seulement que le système \hat{R}_ϕ ou \hat{R}_G est stable.

Corollaire 4.4.1

Si \exists des constantes $\alpha', \beta' > 0$ telles que
 $\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (3.22) :

$$\pi(t, x, u) \geq \alpha' x^T x + \beta' u^T u$$

Alors chaque indice d'entrée du système en boucle fermée a :

1. au moins une marge de gain de :

$$20 \log \frac{1 + \sqrt{\theta(\beta - \theta\beta\delta + \delta)}}{1 - \theta\beta} \text{ dB} \quad (4.20)$$

2. au moins une tolerance de reduction de gain de :

$$20 \log \frac{1 - \theta\beta}{1 - \sqrt{\theta(\beta - \theta\beta\delta + \delta)}} \text{ dB} \quad (4.21)$$

3. au moins une marge de phase de :

$$\pm \arccos \left[1 - \frac{\theta}{2}(\beta + \delta) \right] \text{ deg} \quad (4.22)$$

où 1. $\theta = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(Q)}$.

2. dB est une échelle logarithmique.

Notes 4.4.1

1. La marge de gain d'un système en boucle fermée peut être interprétée comme :
le facteur avec lequel le gain de boucle peut être augmenté jusqu'à ce que le système devient instable.
Pour une interprétation précise dans le cadre de notre problème, voir le point 5 (Conclusion) de la 1^{ère} Etape de la preuve qui suit.
2. La marge de phase peut être interprétée comme :
le facteur du décalage de phase négative qu'il faut introduire pour que la partie du diagramme de Nyquist correspondant au $w \geq 0$ passe par le point $-1 + j0$.
Pour une interprétation précise dans le cadre de notre problème, voir le point 3 (Conclusion) de la 2^{ème} Etape de la preuve qui suit.

Preuve :

1^{ère} Partie : Démontrons les résultats (4.20) et (4.21) :

1. Application du théorème 4.3.1 :

On considère le système \hat{R}_ϕ .

Par le théorème 4.3.1, on sait que :

- sous l'hypothèse (3.10),
cette hypothèse est satisfaite pour le corollaire, car on a que la condition (3.10) est équivalente à l'hypothèse (3.22).
- le système \hat{R}_ϕ est stable pour une nonlinéarité $\phi(t, u)$ satisfaisant (4.5).

On prend cette nonlinéarité indice par indice, c'est à dire :

La fonction $\phi(t, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est décrite par :

$$\phi(t, u) = [\phi_1(t, u_1), \dots, \phi_m(t, u_m)]^T$$

où $\phi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. Condition de stabilité du système \hat{R}_ϕ :

On prend la fonction ϕ indice par indice :

Si chaque composante $\phi_i(t, u_i)$ de $\phi(t, u)$ satisfait la condition :

$$\lambda_{\max}(Q)(\phi_i - u_i)^2 - \beta \lambda_{\min}(Q)(\phi_i)^2 - \delta \lambda_{\min}(Q)(u_i)^2 \leq 0 \quad (4.23)$$

$$\forall (t, u_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$$

Alors on a stabilité du système \hat{R}_ϕ .

En effet

Comme l'inégalité (4.23) est satisfaite pour chaque composante $\phi_i(t, u_i)$, elle implique que :

$$\lambda_{\max}(Q) \sum_{i=1}^m (\phi_i - u_i)^2 - \beta \lambda_{\min}(Q) \sum_{i=1}^m (\phi_i)^2 - \delta \lambda_{\min}(Q) \sum_{i=1}^m (u_i)^2 \leq 0.$$

Cette dernière inégalité est équivalente à :

$$\lambda_{\max}(Q)\|\phi - u\|^2 - \beta\lambda_{\min}(Q)\|\phi\|^2 - \delta\lambda_{\min}(Q)\|u\|^2 \leq 0.$$

Comme $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice symétrique, on a :

1. $(\phi - u)^T Q (\phi - u) \leq \lambda_{\max}(Q)\|\phi - u\|^2$
2. $-\beta\phi^T Q \phi \leq -\beta\lambda_{\min}(Q)\|\phi\|^2$
3. $-\delta u^T Q u \leq -\delta\lambda_{\min}(Q)\|u\|^2$

Donc, en utilisant ces résultats, on obtient :

$$\begin{aligned} (\phi - u)^T Q (\phi - u) - \beta\phi^T Q \phi - \delta u^T Q u \\ \leq \lambda_{\max}(Q)\|\phi - u\|^2 - \beta\lambda_{\min}(Q)\|\phi\|^2 - \delta\lambda_{\min}(Q)\|u\|^2 \\ \leq 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la nonlinéarité $\phi(t, u)$ satisfait l'hypothèse (4.5), alors par conclusion du théorème 4.3.1, le système \hat{R}_ϕ est stable.

3. Ecrire l'inégalité (4.23) sous une autre forme :

L'inégalité (4.23) est équivalente à :

$$\lambda_{\max}(Q)\phi_i^2 + \lambda_{\max}(Q)u_i^2 - 2\lambda_{\max}(Q)\phi_i u_i - \beta\lambda_{\min}(Q)(\phi_i)^2 - \delta\lambda_{\min}(Q)(u_i)^2 \leq 0$$

ou encore

$$(\lambda_{\max}(Q) - \beta\lambda_{\min}(Q))\phi_i^2 - 2\lambda_{\max}(Q)\phi_i u_i + (\lambda_{\max}(Q) - \delta\lambda_{\min}(Q))u_i^2 \leq 0.$$

On divise le tout par $u_i^2 \geq 0$, ce qui nous donne

$$(\lambda_{\max}(Q) - \beta\lambda_{\min}(Q)) \left(\frac{\phi_i}{u_i} \right)^2 - 2\lambda_{\max}(Q) \frac{\phi_i}{u_i} + (\lambda_{\max}(Q) - \delta\lambda_{\min}(Q)) \leq 0$$

On divise le tout par $\lambda_{\max}(Q) > 0$, car $Q > 0$, on obtient donc

$$\left(1 - \beta \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(Q)}\right) \left(\frac{\phi_i}{u_i} \right)^2 - 2 \frac{\phi_i}{u_i} + \left(1 - \delta \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(Q)}\right) \leq 0$$

Ce qui est équivalent à

$$(1 - \beta\theta) \left(\frac{\phi_i}{u_i} \right)^2 - 2 \frac{\phi_i}{u_i} + (1 - \delta\theta) \leq 0 \quad (\clubsuit)$$

4. Résolution de l'inégalité (\clubsuit) :

1. Recherche des racines :

$$\Delta : 4 - 4(1 - \theta\beta)(1 - \theta\delta)$$

On a 2 racines :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\phi_i}{u_i} \right) &= \frac{2 \pm \sqrt{4(1 - (1 - \theta\beta)(1 - \theta\delta))}}{2(1 - \theta\beta)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1 - \theta\beta)(1 - \theta\delta)}}{(1 - \theta\beta)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{\theta(\beta + \delta - \theta\beta\delta)}}{(1 - \theta\beta)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Les deux racines sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\phi_i}{u_i} \right)_1 &= \frac{1 - \sqrt{\theta(\beta + \delta - \theta\beta\delta)}}{(1 - \theta\beta)} \\ \left(\frac{\phi_i}{u_i} \right)_2 &= \frac{1 + \sqrt{\theta(\beta + \delta - \theta\beta\delta)}}{(1 - \theta\beta)} \end{aligned}$$

2. Il faut traiter deux cas :

(a) Si $(1 - \theta\beta) \geq 0$:

$$\text{Dans ce cas : } \left(\frac{\phi_i}{u_i} \right)_1 \leq \left(\frac{\phi_i}{u_i} \right)_2$$

On dresse le tableau :

$\frac{\phi_i}{u_i}$	$\left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)_1$	$\left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)_2$
$(1 - \beta\theta) \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)^2 - 2\frac{\phi_i}{u_i} + (1 - \delta\theta)$	+	-

Pour que : $\forall (t, u_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$

$$(1 - \beta\theta) \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)^2 - 2\frac{\phi_i}{u_i} + (1 - \delta\theta) \leq 0$$

c'est à dire l'inégalité (\clubsuit) est vérifiée,

$$\text{il faut : } \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)_1 \leq \frac{\phi_i}{u_i} \leq \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)_2$$

(b) Si $(1 - \theta\beta) \leq 0$:

$$\text{Dans ce cas : } \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)_2 \leq \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)_1$$

On dresse le tableau :

$\frac{\phi_i}{u_i}$	$\left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)_2$	$\left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)_1$
$(1 - \beta\theta) \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)^2 - 2\frac{\phi_i}{u_i} + (1 - \delta\theta)$	-	+

Pour que : $\forall (t, u_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$

$$(1 - \beta\theta) \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)^2 - 2\frac{\phi_i}{u_i} + (1 - \delta\theta) \leq 0$$

c'est à dire l'inégalité (\clubsuit) est vérifiée,

$$\text{il faut : } \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)_1 \leq \frac{\phi_i}{u_i} \leq \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)_2$$

3. Conclusion :

Pour les deux cas, pour que l'inégalité (♣) est vérifiée, il faut : $\forall (t, u_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$

$$\left(\frac{\phi_i}{u_i} \right)_1 \leq \frac{\phi_i}{u_i} \leq \left(\frac{\phi_i}{u_i} \right)_2$$

5. Conclusion :

Pour que l'équation (♣), qui est équivalente à l'inégalité (4.23), est vérifiée, et donc le système \hat{R}_ϕ est stable, il faut : $\forall (t, u_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$

$$\frac{1 - \sqrt{\theta(\beta + \delta - \theta\beta\delta)}}{(1 - \theta\beta)} \leq \frac{\phi_i}{u_i} \leq \frac{1 + \sqrt{\theta(\beta + \delta - \theta\beta\delta)}}{(1 - \theta\beta)} \quad (4.25)$$

où :

• Le terme de droit de l'inégalité (4.25) exprime la borne supérieure que $\left(\frac{\phi_i}{u_i} \right)$ peut atteindre pour assurer la stabilité du système \hat{R}_ϕ , c'est donc la marge de gain :

$$20 \log \frac{1 + \sqrt{\theta(\beta - \theta\beta\delta + \delta)}}{1 - \theta\beta} \text{ dB}$$

On mesure le gain en dB , on prend son logarithme en base 10 et on multiplie par 20.

• Le terme de gauche de l'inégalité (4.25) exprime la borne inférieure que $\left(\frac{\phi_i}{u_i} \right)$ peut atteindre pour assurer la stabilité du système \hat{R}_ϕ , c'est donc la tolérance de réduction de gain :

$$20 \log \frac{1 - \theta\beta}{1 - \sqrt{\theta(\beta - \theta\beta\delta + \delta)}} \text{ dB}$$

2^{ieme} Partie : Démontrons (4.22) :

1. Application du théorème 4.3.2 :

On considère le système \hat{R}_G .

Par le théorème 4.3.2, on sait que :

- sous l'hypothèse (3.10),
cette hypothèse est satisfaite pour le corollaire, car on a que la condition (3.10) est équivalente à l'hypothèse (3.22).
- le système \hat{R}_G est stable pour un élément stable, constant, linéaire ayant comme fonction de transfert $\hat{G}(s)$, satisfaisant (4.9).

L'élément linéaire est décrit par :

$$\hat{G}(s) = \text{diag}\{\hat{G}_1(s), \dots, \hat{G}_m(s)\}$$

2. Condition de stabilité du système \hat{R}_G :

Si $\forall w \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$

$$\lambda_{\max}(Q)|\hat{G}_i(jw) - 1|^2 - \beta\lambda_{\min}(Q)|\hat{G}_i(jw)|^2 - \delta\lambda_{\min}(Q) \leq 0 \quad (4.26)$$

Alors on a stabilité du système \hat{R}_G .

En effet

Comme l'inégalité (4.26) est satisfaite $\forall w \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$, elle implique :

$$\lambda_{\max}(Q) \sum_{i=1}^m |\hat{G}_i(jw) - 1|^2 - \beta\lambda_{\min}(Q) \sum_{i=1}^m |\hat{G}_i(jw)|^2 - \delta\lambda_{\min}(Q) \leq 0.$$

Cette inégalité est équivalente à :

$$\lambda_{\max}(Q)\|\hat{G}(jw) - I\|^2 - \beta\lambda_{\min}(Q)\|\hat{G}(jw)\|^2 - \delta\lambda_{\min}(Q) \leq 0$$

Comme $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice symétrique, on a :

1. $[\hat{G}(jw) - I]^* Q [\hat{G}(jw) - I] \leq \lambda_{\max}(Q)\|\hat{G}(jw) - I\|^2$
2. $-\beta\hat{G}^*(jw)Q\hat{G}(jw) \leq -\beta\lambda_{\min}(Q)\|\hat{G}(jw)\|^2$
3. $-\delta Q = -\delta I^* Q I \leq -\delta\lambda_{\min}(Q)\|I\|^2 = -\delta\lambda_{\min}(Q)$

En utilisant ces résultats, on obtient :

$$\begin{aligned} & [\hat{G}(jw) - I]^* Q [\hat{G}(jw) - I] - \beta\hat{G}^*(jw)Q\hat{G}(jw) - \delta Q \\ & \leq \lambda_{\max}(Q)\|\hat{G}(jw) - I\|^2 - \beta\lambda_{\min}(Q)\|\hat{G}(jw)\|^2 - \delta\lambda_{\min}(Q) \\ & \leq 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre que la fonction de transfert $\widehat{G}(s)$ satisfait l'hypothèse (4.9), alors par conclusion du théorème 4.3.2, le système \widehat{R}_G est stable.

3. Conclusion :

Pour estimer la marge de phase, on utilise $|\widehat{G}_i(jw)| = 1$, car on s'intéresse aux points qui se trouvent à une distance d'une unité de l'origine.

Il faut trouver l'angle séparant le point $(-1 + j0)$ du point admissible se trouvant le plus proche de ce point, ce qui nous donnera la marge de phase.

D'abord, on calcule la partie réelle du point le plus proche et ensuite on appliquera *arccos*, pour avoir l'angle.

En remplaçant $|\widehat{G}_i(jw)| = 1$ dans l'inégalité (4.26), on obtient :
(4.26) :

$$\lambda_{max}(Q)|\widehat{G}_i(jw) - 1|^2 - \beta\lambda_{min}(Q)|\widehat{G}_i(jw)|^2 - \delta\lambda_{min}(Q) \leq 0.$$

On divise le tout par $\lambda_{max}(Q) > 0$, car $Q > 0$, ce qui donne

$$|\widehat{G}_i(jw) - 1|^2 - \beta\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(Q)}|\widehat{G}_i(jw)|^2 - \delta\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(Q)} \leq 0$$

En y remplaçant θ , on obtient :

$$|\widehat{G}_i(jw) - 1|^2 - \beta\theta|\widehat{G}_i(jw)|^2 - \delta\theta \leq 0$$

En y mettant $|\widehat{G}_i(jw)| = 1$

$$|\widehat{G}_i(jw) - 1|^2 - \beta\theta - \delta\theta \leq 0$$

Ce qui est équivalent à :

$$-\theta(\beta + \delta) \leq -|\widehat{G}_i(jw) - 1|^2$$

Comme $|\widehat{G}_i(jw) - 1|^2 = \underbrace{|\widehat{G}_i(jw)|^2}_{=1} + 1 - 2\text{Re}(\widehat{G}_i(jw)) = 2 - 2\text{Re}(\widehat{G}_i(jw))$

En utilisant ce calcul, on obtient :

$$-\theta(\beta + \delta) \leq -2(1 - \operatorname{Re}(\widehat{G}_i(jw)))$$

ou encore

$$-\frac{\theta}{2}(\beta + \delta) \leq -1 + \operatorname{Re}(\widehat{G}_i(jw))$$

Ce qui est équivalent à :

$$1 - \frac{\theta}{2}(\beta + \delta) \leq \operatorname{Re}(\widehat{G}_i(jw))$$

où $1 - \frac{\theta}{2}(\beta + \delta)$ est la partie réelle du point se trouvant le plus proche.

On applique *arccos* :

$$\arccos \left(1 - \frac{\theta}{2}(\beta + \delta)\right) = \text{marge de phase.}$$

□

Remarques 4.4.1

1. Si Q est diagonal, c'est à dire $Q = \operatorname{diag}[Q_1, \dots, Q_m]$

Alors les conclusions du corollaire 4.4.1 sont vérifiées pour $\theta = 1$.

Preuve :

1. Si chaque composante $\phi_i(t, u_i)$ de $\phi(t, u)$ satisfait

$$(\phi_i - u_i)^T Q_i (\phi_i - u_i) \leq \beta \phi_i^T Q_i \phi_i + \delta u_i^T Q_i u_i \quad (4.27)$$

$$\forall (t, u_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

Alors la condition de stabilité (4.5) du théorème 4.3.1 est vérifiée et le système \widehat{R}_ϕ est stable.

En effet

Comme l'inégalité (4.27) est satisfaite pour chaque composante $\phi_i(t, u_i)$, elle implique :

$$\sum_{i=1}^m (\phi_i - u_i)^T Q_i (\phi_i - u_i) \leq \beta \sum_{i=1}^m \phi_i^T Q_i \phi_i + \delta \sum_{i=1}^m u_i^T Q_i u_i$$

Comme par hypothèse la matrice Q est diagonale, cette dernière inégalité est équivalente à

$$(\phi - u)^T Q (\phi - u) \leq \beta \phi^T Q \phi + \delta u^T Q u$$

Ce qui signifie que la condition (4.5) est vérifiée.

2. Ecrivons l'inégalité (4.27) sous la forme équivalente

$$Q_i (\phi_i - u_i)^2 \leq \beta Q_i \phi_i^2 + \delta Q_i u_i^2.$$

De même, en rassemblant tout d'un même côté, on a :

$$Q_i ((\phi_i - u_i)^2 - \beta \phi_i^2 - \delta u_i^2) \leq 0.$$

On divise par $Q_i > 0$, car $Q > 0$, ce qui donne

$$(\phi_i - u_i)^2 - \beta \phi_i^2 - \delta u_i^2 \leq 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\phi_i^2 + u_i^2 - 2\phi_i u_i - \beta \phi_i^2 - \delta u_i^2 \leq 0.$$

On divise le tout par $u_i^2 \geq 0$, on obtient alors

$$\left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{\phi_i}{u_i}\right) - \beta \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)^2 - \delta \leq 0$$

ce qui est équivalent à

$$(1 - \beta) \left(\frac{\phi_i}{u_i}\right)^2 - 2\frac{\phi_i}{u_i} + (1 - \delta) \leq 0.$$

Cette dernière inégalité est l'inégalité (♣) du corollaire 4.3.1 avec $\theta = 1$

□

2.

Corollaire 4.4.2

Si

- (a) f est indépendant de u et \exists une constante $\alpha > 0$ telle que
 $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$x^T Lx - 2x^T P f \geq \alpha x^T Lx \quad (4.28)$$

- (b) Q est diagonal

- (c) $\beta = 1$

Alors \hat{R} a :

- (a) une marge de gain infinie
 (b) au moins 50% de tolérance de réduction de gain
 (c) au moins ± 60 deg de marge de phase

" Ce sont les propriétés de robustesse standard du système de contrôle LQ optimal, voir également la référence [8]. "

Preuve :

1. Verification de l'hypothèse du corollaire 4.4.1

En effet, il suffit de montrer l'inégalité (3.10), qui est équivalente à l'inégalité (3.22) :

On a l'hypothèse (4.27) : $x^T Lx - 2x^T P f \geq \alpha x^T Lx$

Comme $\beta = 1$, on peut la réécrire :

$$x^T Lx - 2x^T P f \geq \alpha x^T Lx + (\beta - 1)u^T Q u$$

ou encore

$$\underbrace{x^T Lx - 2x^T P f + u^T Q u}_{:=\pi} \geq \alpha x^T Lx + \beta u^T Q u$$

c'est à dire l'inégalité (3.10) est vérifiée.

2. Conclusion :

On peut appliquer les résultats du corollaire 4.4.1, car son hypothèse est vérifiée.

Comme Q est diagonal, on a : $\theta = 1$, voir la première des remarques 4.4.1

Donc, on a :

- (a) La marge de gain est par le corollaire 4.4.1 égale à

$$20 \log \frac{1 + \sqrt{\theta(\beta - \theta\beta\delta + \delta)}}{1 - \theta\beta} \text{ dB}$$

On peut y remplacer θ et β par 1, ce qui nous donne comme marge de gain :

$$20 \log \frac{1 + \sqrt{1 - \delta + \delta}}{1 - 1} \text{ dB}$$

Ceci est équivalent à :

$$20 \log \frac{2}{0} \text{ dB}$$

ou encore

$$20 \log \infty \text{ dB}$$

Comme le logarithme ∞ est égal à l'infini, on a donc une marge de gain infinie.

- (b) La tolérance de réduction de gain est calculée d'une manière similaire

- (c) La marge de phase est par le corollaire 4.4.1 égale à :

$$\pm \arccos(1 - \frac{\theta}{2}(\beta + \delta)) \text{ deg}$$

On peut y remplacer θ et β par 1, ce qui nous donne comme marge de phase :

$$\pm \arccos(1 - \frac{1}{2}(1 + \delta)) \text{ deg}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\pm \arccos(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta) \text{ deg}$$

Comme δ est un nombre positif, on a que $\frac{\delta}{2}$ est également positif.
Donc, il est facile à voir que : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2}$.
En appliquant \arccos aux deux côtés, on a : $\arccos(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta) > \arccos(\frac{1}{2})$.

Donc, on a au moins une marge de phase :

$$\pm \arccos(\frac{1}{2}) \text{ deg} = \text{au moins } \pm 60 \text{ deg}.$$

□

3. Comme pour le deuxième cas de la section 3.2.2, on va faire un changement de contrôle :

$$(3.30) : u_\rho = -\rho Q^{-1} B^T P x$$

$$(3.31) : \pi_\rho = x^T L x - 2x^T P f + (\rho - 1)x^T P B Q^{-1} B^T P x + \rho^{-1} u^T Q u$$

On a :

Si

- (a) \exists une constante $\zeta > 0$ telle que $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$x^T L x - 2x^T P h \geq \zeta x^T x \quad (4.29)$$

- (b) $\beta = \rho \beta_\rho$ et $\delta = \rho^{-1} \delta_\rho$

- (c) $\alpha_\rho L - \delta_\rho P B Q^{-1} B^T P > 0$, où $\beta_\rho, \alpha_\rho, \rho > 0$

Alors

- (a) \hat{R}_ϕ est stable $\forall \phi(t, u)$ nonlinéaire vérifiant (4.5).

- (b) \hat{R}_G est stable pour tout élément stable, constant, linéaire ayant comme fonction de transfert $\hat{G}(s)$, vérifiant (4.9).

Notes 4.4.2

Par le théorème 3.2.2, on sait que :

$$\pi_\rho \geq \alpha_\rho x^T L x + \beta_\rho u^T Q u$$

Une inégalité qui est similaire à l'hypothèse des théorèmes 4.3.2 et 4.3.1.

Preuve :

La preuve de (a) respectivement de (b) est similaire à celle du théorème 4.3.1, respectivement du théorème 4.3.2 .

Faisons donc seulement celle du (a) :

(a) Considérons la forme quadratique :

$$w(x) = x^T P x$$

(b) Calculons la dérivée de w le long des trajectoires du système.

$$\begin{aligned} \dot{w}(x) &\leq -x^T (\alpha_\rho L - \delta_\rho P B Q^{-1} B^T P) x \\ &\quad + (\rho^{-1} - \beta_\rho) \phi^T Q \phi - 2\rho^{-1} \phi^T Q u_\rho + \rho^{-2} (\rho - \delta_\rho) u_\rho^T Q u_\rho \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pour les détails de calcul voir Annexe E.

(c) $w(x) > 0$, $\dot{w}(x) < 0$:

En effet

i. $w(x) = x^T P x > 0$, car P est défini positif

ii.

$$\begin{aligned} \dot{w}(x) &\leq -x^T (\alpha_\rho L - \delta_\rho P B Q^{-1} B^T P) x \\ &\quad + (\rho^{-1} - \beta_\rho) \phi^T Q \phi - 2\rho^{-1} \phi^T Q u_\rho + \rho^{-2} (\rho - \delta_\rho) u_\rho^T Q u_\rho \\ &< 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

car :

$$\text{A. } -x^T \underbrace{(\alpha_\rho L - \delta_\rho P B Q^{-1} B^T P)}_{> \text{ par hypothèse}} x < 0$$

$$\text{B. } (\rho^{-1} - \beta_\rho)\phi^T Q \phi - 2\rho^{-1}\phi^T Q u_\rho + \rho^{-2}(\rho - \delta_\rho)u_\rho^T Q u_\rho < 0 \quad ?$$

En multipliant le tout par $\rho > 0$, on a :

$$(1 - \rho\beta_\rho)\phi^T Q \phi - 2\phi^T Q u_\rho + (1 - \rho^{-1}\delta_\rho)u_\rho^T Q u_\rho < 0 \quad ?$$

Comme $\beta = \rho\beta_\rho$ et $\delta = \rho^{-1}\delta_\rho$, cette inégalité est équivalente à :

$$(1 - \beta)\phi^T Q \phi - 2\phi^T Q u_\rho + (1 - \delta)u_\rho^T Q u_\rho < 0$$

Cette dernière inégalité est vérifiée par l'inégalité (4.5).

Donc $(\rho^{-1} - \beta_\rho)\phi^T Q \phi - 2\rho^{-1}\phi^T Q u_\rho + \rho^{-2}(\rho - \delta_\rho)u_\rho^T Q u_\rho$ est strictement négatif.

(d) Conclusion :

La conclusion est la même que celle du théorème 4.3.1

□

Chapitre 5

Application

Après avoir étudié le côté théorique de ce mémoire, intéressons nous maintenant à un exemple illustratif.

Il faudra évidemment commencer par donner une brève description du modèle. Ensuite, on mettra les équations de mouvement en place, pour pouvoir écrire le problème sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(t, x, u)$$

Puis, après vérification des hypothèses établies par la théorie, notre exemple entrera dans le cadre de ce mémoire.

5.1 Le problème

On considère un chariot auquel est attaché un pendule inversé.

Le système est évidemment instable, car le pendule risque de tomber très vite.

Le problème est donc d'appliquer une force de contrôle à ce chariot, dans le but de garder le pendule droit. On essaie de contrôler l'angle du pendule et la position du chariot.

On prend comme hypothèse :

- Le pendule et le chariot se déplacent dans un plan.
- On néglige la friction.

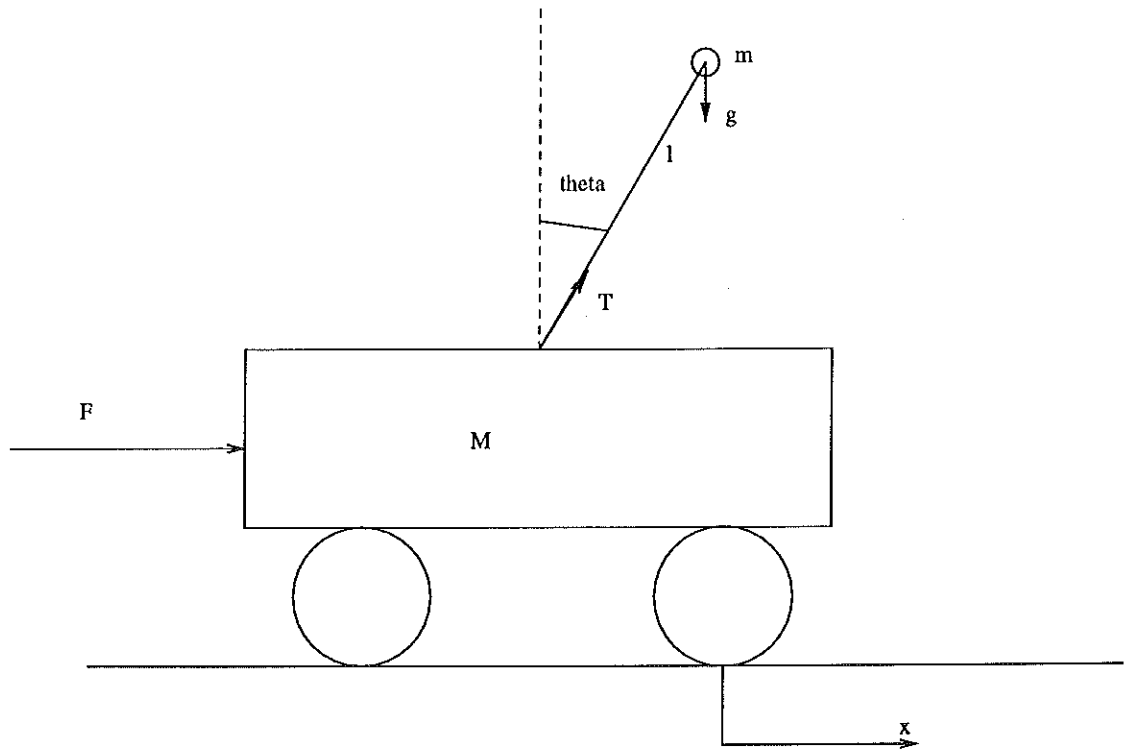


FIG. 5.1 – Figure présentant le problème.

où les constantes et variables sont les suivantes :

- M est la masse du chariot = 1kg
- m est la masse du pendule = 0.1kg
- l est la longueur du pendule = 1m
- θ est l'angle du pendule à la verticale
- x est la position horizontale du chariot
- T est la force qu'exerce le chariot sur le pendule
- F est la force appliquée au chariot

5.2 Equations de mouvement du système

On utilise la seconde loi de Newton :

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

1. appliquée à la masse M :

$$\vec{F} = M\ddot{x} \quad (5.1)$$

2. appliquée à la masse m :

(a) dans la direction horizontale :

où la position de m est $x + l\sin\theta$

$$\begin{aligned} T\sin\theta &= m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin\theta) \\ &= m\frac{d}{dt}(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta) \\ &= m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta) \end{aligned} \quad (5.2)$$

(b) dans la direction verticale :

$$\begin{aligned} T\cos\theta - mg &= m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta) \\ &= m\frac{d}{dt}(-l\dot{\theta}\sin\theta) \\ &= m(-l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Conclusion :

1. Les équations (5.1) et (5.2) donnent :

$$\begin{aligned} u &= M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ &= (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \end{aligned} \quad (5.4)$$

2. On multiplie :

(a) L'équation (5.2) par $\cos\theta$, ce qui nous donne :

$$T\sin\theta\cos\theta = m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta}\cos^2\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta \quad (5.5)$$

(b) L'équation (5.3) par $\sin\theta$, ce qui donne :

$$T\cos\theta\sin\theta - mg\sin\theta = -ml\ddot{\theta}\sin^2\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta \quad (5.6)$$

Alors, en soustrayant (5.6) de (5.5), on obtient :

$$mg\sin\theta = m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta}\cos^2\theta + ml\dot{\theta}^2\sin\theta \quad (5.7)$$

3. Les équations (5.4) et (5.7) donnent les équations de mouvement du système, c'est à dire :

- $u = (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$
- $mg\sin\theta = m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta}$

On va écrire \ddot{x} et $\ddot{\theta}$ en fonction des autres termes :

(a) De la première équation, on peut extraire \ddot{x} :

$$\ddot{x} = \frac{u}{M + m} - \frac{ml\ddot{\theta}\cos\theta}{M + m} + \frac{ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{M + m} \quad (5.8)$$

Mais, dans ce cas \ddot{x} dépend encore de $\ddot{\theta}$, il faudra donc améliorer.

(b) On remplace (5.8) dans la deuxième équation, ce qui nous donne :

$$g\sin\theta = l\ddot{\theta} + \frac{u}{M + m}\cos\theta - \frac{ml\ddot{\theta}\cos^2\theta}{M + m} + \frac{ml\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta}{M + m} \quad (5.9)$$

En isolant les termes en $\ddot{\theta}$, on obtient :

$$\begin{aligned} g\sin\theta - \frac{u}{M + m}\cos\theta - \frac{ml\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta}{M + m} &= l\ddot{\theta} \left(1 - \frac{m\cos^2\theta}{M + m} \right) \\ &= l\ddot{\theta} \left(\frac{M + m - m\cos^2\theta}{M + m} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Donc, en isolant $\ddot{\theta}$ tout seul, on a :

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{1}{l} \frac{M+m}{M+m-m\cos^2\theta} \left(g\sin\theta - \frac{u}{M+m}\cos\theta - \frac{ml\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta}{M+m} \right) \\
&= \frac{1}{l} \frac{M+m}{M+m-m\cos^2\theta} g\sin\theta - \frac{1}{l} \frac{\cos\theta u}{M+m-m\cos^2\theta} - \frac{m\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta}{M+m-m\cos^2\theta} \quad (5.11)
\end{aligned}$$

On a donc trouvé $\ddot{\theta}$ en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et u .

(c) On va maintenant écrire \ddot{x} en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et u :

On remplace (5.11) dans (5.8), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{u}{M+m} + \frac{ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{M+m} - \frac{ml}{M+m}\cos\theta \\
&\quad \left(\frac{M+m}{l(M+m-m\cos^2\theta)} g\sin\theta - \frac{\cos\theta}{l(M+m-m\cos^2\theta)} u - \frac{m\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta}{M+m-m\cos^2\theta} \right) \quad (5.12)
\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{u}{M+m} + \frac{ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{M+m} - \frac{mg\cos\theta\sin\theta}{M+m-m\cos^2\theta} \\
&\quad + \frac{m\cos^2\theta u}{(M+m)(M+m-m\cos^2\theta)} + \frac{m^2l\dot{\theta}^2\cos^2\theta\sin\theta}{(M+m)(M+m-m\cos^2\theta)} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

On est donc parvenu à écrire \ddot{x} en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et u

4. Mais les équations de mouvement du système sont non linéaires, car les fonctions sinus et cosinus sont non linéaires.

5.3 Linéarisation du problème

Le but du contrôle est de garder le pendule droit (c'est à dire θ plus ou moins 0), donc on va linéariser autour du point $\theta = 0$.

On linéarise en retenant seulement les termes en θ et $\dot{\theta}$, et en négligeant ceux d'ordres supérieurs. $(\theta^2, \theta^3, \dots, \dot{\theta}^2, \theta\dot{\theta}, \dots)$.

Alors, les équations (5.4) et (5.7) deviennent après linéarisation autour de petits angles :

- $u = (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}$
- $mg\theta = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}$

On va tirer de ces deux équations linéaires \ddot{x} et $\ddot{\theta}$ en fonction de u et θ

1. En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient :

$$u - mg\theta = M\ddot{x}$$

donc :

$$\ddot{x} = \frac{u}{M} - \frac{m}{M}g\theta \quad (5.14)$$

On est parvenu à écrire \ddot{x} en fonction de θ et u .

2. En remplaçant l'équation (5.14) dans la deuxième, on a :

$$mg\theta = ml\ddot{\theta} + \frac{m}{M}u - \frac{m^2}{M}g\theta$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{\theta}{l}g - \frac{u}{Ml} + \frac{m}{Ml}g\theta \\ &= \left(\frac{M+m}{Ml}\right)g\theta - \frac{u}{Ml} \end{aligned} \quad (5.15)$$

5.4 Mise sous forme $\dot{x} = Ax + Bu + f(t, x, u)$

L'état x est représenté par $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ appartenant à \mathbb{R}^4 .

L'entrée est représentée par u appartenant à \mathbb{R} .

La dérivée de l'état est alors : $(\dot{x}, \ddot{x}, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$

où

1. \ddot{x} est donné par l'équation (5.13) :

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= \frac{u}{M+m} + \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin\theta}{M+m} - \frac{mg\cos\theta \sin\theta}{M+m - m\cos^2\theta} \\
 &\quad + \frac{m\cos^2\theta u}{(M+m)(M+m - m\cos^2\theta)} + \frac{m^2 l \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \sin\theta}{(M+m)(M+m - m\cos^2\theta)} \\
 &\quad + \left(\frac{u}{M} - \frac{m}{M}g\theta - \frac{u}{M} + \frac{m}{M}g\theta \right) \\
 &= \frac{u}{M} - \frac{m}{M}g\theta \\
 &\quad + \left(\frac{u}{M+m} + \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin\theta}{M+m} - \frac{mg\cos\theta \sin\theta}{M+m - m\cos^2\theta} \right. \\
 &\quad + \frac{m\cos^2\theta u}{(M+m)(M+m - m\cos^2\theta)} + \frac{m^2 l \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \sin\theta}{(M+m)(M+m - m\cos^2\theta)} \\
 &\quad \left. - \frac{u}{M} + \frac{m}{M}g\theta \right) \\
 &= \frac{u}{M} - \frac{m}{M}g\theta + f_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{où } f_2 &= \left(\frac{u}{M+m} + \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin\theta}{M+m} - \frac{mg\cos\theta \sin\theta}{M+m - m\cos^2\theta} \right. \\
 &\quad + \frac{m\cos^2\theta u}{(M+m)(M+m - m\cos^2\theta)} + \frac{m^2 l \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \sin\theta}{(M+m)(M+m - m\cos^2\theta)} \\
 &\quad \left. - \frac{u}{M} + \frac{m}{M}g\theta \right)
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

2. $\ddot{\theta}$ est donné par l'équation (5.11)

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{1}{l} \frac{M+m}{M+m-m\cos^2\theta} g \sin\theta - \frac{1}{l} \frac{\cos\theta u}{M+m-m\cos^2\theta} - \frac{m\dot{\theta}^2 \cos\theta \sin\theta}{M+m-m\cos^2\theta} \\
&\quad + \left(\frac{M+m}{Ml} g\theta - \frac{u}{Ml} - \frac{M+m}{Ml} g\theta + \frac{u}{Ml} \right) \\
&= \frac{M+m}{Ml} g\theta - \frac{u}{Ml} \\
&\quad + \left(\frac{1}{l} \frac{M+m}{M+m-m\cos^2\theta} g \sin\theta - \frac{1}{l} \frac{\cos\theta u}{M+m-m\cos^2\theta} - \frac{m\dot{\theta}^2 \cos\theta \sin\theta}{M+m-m\cos^2\theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{M+m}{Ml} g\theta + \frac{u}{Ml} \right) \\
&= \frac{M+m}{Ml} g\theta - \frac{u}{Ml} + f_4 \\
\text{où } f_4 &= \left(\frac{1}{l} \frac{M+m}{M+m-m\cos^2\theta} g \sin\theta - \frac{1}{l} \frac{\cos\theta u}{M+m-m\cos^2\theta} - \frac{m\dot{\theta}^2 \cos\theta \sin\theta}{M+m-m\cos^2\theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{M+m}{Ml} g\theta + \frac{u}{Ml} \right)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

En mettant la dérivée de x sous forme de matrice, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{M+m}{Ml}g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \\ f_4 \end{pmatrix}.$$

où

$$\bullet \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{M+m}{Ml}g & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

- $B := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$

- $f := \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \\ f_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}.$

En remplaçant les constantes par leurs valeurs, on obtient :

- $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{pmatrix}$

- $B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $f := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{1.1} + \frac{\dot{\theta}^2 \sin \theta}{11} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{1.1 - 0.1 \cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta u}{11(1.1 - 0.1 \cos^2 \theta)} + \frac{\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{110(1.1 - 0.1 \cos^2 \theta)} - u + \theta \\ 0 \\ \frac{11 \sin \theta}{1.1 - 0.1 \cos^2 \theta} - \frac{\cos \theta u}{1.1 - 0.1 \cos^2 \theta} - \frac{0.1 \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta}{1.1 - 0.1 \cos^2 \theta} - 11\theta + u \end{pmatrix}$

5.5 Verification des hypothèses

On vérifie les différentes hypothèses ayant été établies par la théorie. Ainsi, si les hypothèses sont vérifiées pour notre modèle, on pourra appliquer

la théorie.

Vérification :

1. Les matrices A et B sont des matrices réelles, constantes, ayant respectivement les dimensions (4×4) et (4×1) .
2. Le système est instable, c'est à dire il existe une valeur propre de A ayant la partie réelle positive.

En effet :

Calculons les valeurs propres de A :

$$\det (sI - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow s^4 - 11s^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2(s - \sqrt{11})(s + \sqrt{11}) = 0$$

$$\text{Alors : } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{11}, \lambda_3 = -\sqrt{11}$$

λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres positives de A .

3. La paire (A, B) est stabilisable :

En effet :

Rappelons :

(a) (A, B) est stabilisable

$$\Leftrightarrow \text{rang} \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}_+$$

(b) (A, B) est complètement contrôlable (c.c)

$$\Leftrightarrow \text{rang} \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Donc, il suffit de montrer que :

(A, B) est c.c. ce qui entraîne que (A, B) est stabilisable.

$$(A, B) \text{ est c.c. } \Leftrightarrow \text{rang } \mathcal{C} = \text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = 4$$

Calculons la matrice de contrôlabilité, \mathcal{C} :

$$\bullet \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $AB := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $A^2B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$

- $A^3B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \end{pmatrix}$

Le déterminant de $\mathcal{C} = 100 \neq 0$

Comme le déterminant de \mathcal{C} est différent de 0, la matrice \mathcal{C} est de rang plein, c'est à dire 4, ce qui entraîne que (A, B) est c.c. ou encore que (A, B) est stabilisable.

4. $f(t, 0, 0) = 0$

C'est facile à vérifier, il suffit de remplacer dans f_2 et $f_4 : x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ et u par 0.

5. Il faut trouver une majoration de la norme de f , tel que

$$\|f(t, x, u)\| \leq \epsilon \|x\| + \eta \|u\|$$

avec $\epsilon, \eta > 0$

En effet :

Il faut montrer :

$$\|f\| = \sqrt{|f_2|^2 + |f_4|^2} \leq \epsilon \sqrt{x^2 + \dot{x}^2 + \theta^2 + \dot{\theta}^2} + \eta |u|$$

(a) On prend comme hypothèse :

$$|\dot{\theta} \sin \theta| = \left| \frac{d}{dt} \cos \theta \right| \text{ très petit, c'est à dire négligeable.}$$

(b) i. Majoration de la valeur absolue de f_2 :

$$f_2 = \left(\frac{u}{M+m} + \frac{m l \dot{\theta}^2 \sin \theta}{M+m} - \frac{m g \cos \theta \sin \theta}{M+m - m \cos^2 \theta} - \frac{u}{M} + \frac{m}{M} g \theta \right. \\ \left. + \frac{m \cos^2 \theta u}{(M+m)(M+m - m \cos^2 \theta)} + \frac{m^2 l \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{(M+m)(M+m - m \cos^2 \theta)} \right)$$

Comme par hypothèse, on néglige les termes en $\dot{\theta} \sin \theta$, on a :

$$f_2 = \left(\frac{u}{M+m} - \frac{m g \cos \theta \sin \theta}{M+m - m \cos^2 \theta} + \frac{m \cos^2 \theta u}{(M+m)(M+m - m \cos^2 \theta)} - \frac{u}{M} + \frac{m}{M} g \theta \right)$$

En prenant la valeur absolue, ça donne :

$$|f_2| = \left| \frac{u}{M+m} - \frac{m g \cos \theta \sin \theta}{M+m - m \cos^2 \theta} + \frac{m \cos^2 \theta u}{(M+m)(M+m - m \cos^2 \theta)} - \frac{u}{M} + \frac{m}{M} g \theta \right|$$

On majore la valeur absolue de f_2 , en utilisant :

- $\cos \theta \leq 1$
- $\sin \theta \leq \theta$
- $\frac{1}{M+m - m \cos^2 \theta} \leq \frac{1}{M}$

Ce qui donne :

$$|f_2| \leq \left(\frac{1}{M+m} + \frac{1}{M} \right) |u| + \frac{m}{M} g |\theta| + \frac{m}{M} g |\theta| + \frac{m}{M(M+m)} |u| \\ = \left(\frac{1}{M+m} + \frac{1}{M} + \frac{m}{M(M+m)} \right) |u| + 2 \frac{m}{M} g |\theta| \\ = \frac{M+m+M+m}{M(M+m)} |u| + 2 \frac{m}{M} g |\theta| \\ = \frac{2(M+m)}{M(M+m)} |u| + 2 \frac{m}{M} g |\theta| \\ = \frac{2}{M} |u| + 2 \frac{m}{M} g |\theta| \quad (5.18)$$

ii. Majoration de la valeur absolue de f_4 :

$$f_4 = \left(\frac{1}{l} \frac{M+m}{M+m-m\cos^2\theta} g \sin\theta - \frac{1}{l} \frac{\cos\theta u}{M+m-m\cos^2\theta} - \frac{m\theta^2 \cos\theta \sin\theta}{M+m-m\cos^2\theta} \right. \\ \left. - \frac{M+m}{Ml} g\theta + \frac{u}{Ml} \right)$$

Comme par hypothèse, on néglige les termes en $\theta \sin\theta$, on a :

$$f_4 = \frac{1}{l} \frac{M+m}{M+m-m\cos^2\theta} g \sin\theta - \frac{1}{l} \frac{\cos\theta u}{M+m-m\cos^2\theta} - \frac{M+m}{Ml} g\theta + \frac{u}{Ml}$$

En prenant la valeur absolue, ça donne :

$$|f_4| = \left| \frac{1}{l} \frac{M+m}{M+m-m\cos^2\theta} g \sin\theta - \frac{1}{l} \frac{\cos\theta u}{M+m-m\cos^2\theta} - \frac{M+m}{Ml} g\theta + \frac{u}{Ml} \right|$$

On majore la valeur absolue de f_4 , en utilisant :

- $\cos\theta \leq 1$
- $\sin\theta \leq \theta$
- $\frac{1}{M+m-m\cos^2\theta} \leq \frac{1}{M}$

Ce qui donne :

$$|f_4| \leq \frac{M+m}{lM} g|\theta| + \frac{1}{Ml} |u| + \frac{M+m}{Ml} g|\theta| + \frac{1}{Ml} |u| \\ = \frac{2}{Ml} |u| + 2 \frac{M+m}{Ml} g|\theta| \quad (5.19)$$

iii. Conclusion :

- $|f_2| \leq \frac{2}{M} |u| + 2 \frac{m}{M} g|\theta|$
- $|f_4| \leq \frac{2}{Ml} |u| + 2 \frac{M+m}{Ml} g|\theta|$

Comme : $l = 1m$ et $m \leq M + m$, on obtient :

- $|f_2| \leq \frac{2}{M} |u| + 2 \frac{m+M}{M} g|\theta|$
- $|f_4| \leq \frac{2}{M} |u| + 2 \frac{M+m}{M} g|\theta|$

(c) Conclusion :

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \sqrt{f_2^2 + f_4^2} \\
&\leq \sqrt{\left(\frac{2}{M}|u| + 2\frac{m+M}{M}g|\theta|\right)^2 + \left(\frac{2}{M}|u| + 2\frac{m+M}{M}g|\theta|\right)^2} \\
&= \sqrt{8\left(\frac{1}{M}|u| + \frac{m+M}{M}g|\theta|\right)^2} \\
&= \sqrt{8}\left(\frac{1}{M}|u| + \frac{m+M}{M}g|\theta|\right) \\
&= \frac{\sqrt{8}}{M}|u| + \sqrt{8}\frac{m+M}{M}g|\theta|
\end{aligned} \tag{5.20}$$

avec :

- $\eta := \frac{\sqrt{8}}{M} > 0$
- $\epsilon := \sqrt{8}\frac{m+M}{M}g > 0$

Conclusion :

Les hypothèses ayant été établies par la théorie sont vérifiées pour cet exemple, le pendule inversé entre donc bien dans le cadre de ce mémoire.

Chapitre 6

Conclusion

Ayant commencé dans le chapitre 3 par établir le contrôle optimal d'une partie linéaire du système non linéaire commandé, notre objectif était ensuite de trouver les modifications à faire sur le coût quadratique pour que la loi de contrôle trouvée pour le système linéaire reste encore optimale pour le système non linéaire.

Ayant alors défini le coût comme suit :

$$\begin{aligned} V(x_0, t_0, \infty, u) &= \int_{t_0}^{\infty} \pi(t, x, u) dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} (x^T L x - 2x^T P f + u^T Q u) dt \end{aligned} \tag{6.1}$$

- Sous une hypothèse établie sur la fonction π , le théorème 3.2.1 conclut que le contrôle optimal de la partie linéaire reste encore optimal pour le système non linéaire.
- De même sous une hypothèse qui est plus facile à vérifier que celle du théorème 3.2.1, le corollaire 3.2.1 a la même conclusion que le théorème précédent.

Dans le chapitre 4, on a considéré le système en boucle fermée, résultant de l'application du contrôle LQ optimal au système non linéaire.

De manière à déterminer les conditions de robustesse de stabilité de ce système en boucle fermée, on a considéré deux types de perturbation. D'une part, une perturbation non linéaire, d'autre part une perturbation linéaire stable dans la boucle.

- Alors, sous l'hypothèse du théorème 3.2.1, dans les théorèmes 4.3.1 et 4.3.2, nous avons établi des conditions suffisantes qui garantissent la stabilité

des deux systèmes perturbés.

- Le corollaire 4.4.1 analyse la stabilité des deux systèmes perturbés en termes de marges de gain et de phase.
- Finalement, le corollaire 4.4.2, nous affirme que sous certaines conditions, le système en boucle fermée aura les propriétés de stabilité robuste, standard du système de contrôle LQ optimal.

Dans le chapitre 5 la théorie est illustrée par un exemple de pendule inversé.

Nous avons montré que les hypothèses établies par la théorie sont satisfaites pour cet exemple, ce qui signifie que le pendule inversé entre bien dans le cadre de ce mémoire.

Il serait intéressant de tester ultérieurement les résultats principaux établis dans ce mémoire, dans le cadre de cette application, aux moyens d'analyses complémentaires et de simulations numériques.

Notations

- $\widehat{G}(s)$ est la transformée de Laplace de $G(t)$
- $L_n^2 := L^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^n) = \{f : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, f \text{ mesurable}$
et $\int_{t_0}^{\infty} |f|^2 < \infty\}$
- $\lambda_{\min}(A)$ est la valeur propre minimale de la matrice A .
- $\lambda_{\max}(A)$ est la valeur propre maximale de la matrice A .
- ldp signifie localement définie positive
- LQ est linéaire quadratique
- $(LQ)_n^\infty$ est le problème de contrôle optimal LQ, normalisé en horizon infini.
- P est la solution de l'équation algébrique de Riccati
- (RA) est l'équation algébrique de Riccati
- $\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, u(\cdot) \text{ est une fonction continue}\}$
= espace d'entrée.
- u_L^0 est le contrôle optimal
- V est le coût.
- V^0 est le coût optimal.
- $f * g$ est le produit de convolution entre les fonctions f et g .
- A^* est la conjuguée transposée de la matrice A .
- $A = A^T$ représente le fait que A est une matrice symétrique.
- $A \geq 0$ représente le fait que A est une matrice semi-définie-positive.
- $A > 0$ représente le fait que A est une matrice définie positive.
- $|\cdot|$ représente une norme scalaire.

Bibliographie

- [1] Ikeda, M. and Siljak, D.D., " *Optimality and robustness of linear quadratic control for nonlinear systems* ", Automatica, Vol.26 , No.3, 1990.
- [2] Callier, F.M. and Desoer, C.A., " *Linear system Theory* ", Springer Verlag, N.Y. , 1991.
- [3] Vidyasagar, M., " *Nonlinear systems analysis (2nd edition)* ", Prentice-Hall Englewood Cliffs (N.J.) , 1993.
- [4] Horn, R.A. and Johnson, C.R., " *Matrix Analysis* ", Cambridge university Press, 1985.
- [5] Toint, Ph.L., " *Algèbre (1^{ère} candi)* ", Namur, 1998.
- [6] Henrard, J., " *Géométrie analytique (1^{ère} candi)* ", Namur, 1998.
- [7] Fortmann, T.E. and Hitz, K.L., " *An introduction to linear control systems* ", Dekker, New - York, 1977.
- [8] Anderson, B.D.O and Moore, J.B., " *Optimal control : linear quadratic methods* ", Prentice-Hall Englewood Cliffs (N.J.), 1989.

Annexes

Annexe A :

Un calcul nécessaire pour démontrer la première étape du théorème 3.2.1 :

$$V(x_0, t_0, \infty, u) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} (u + Q^{-1}B^T Px)^T Q (u + Q^{-1}B^T Px) dt - x(t_1)^T P x(t_1) \right) + x_0^T P x_0 \quad (6.2)$$

En utilisant les résultats (3.1), (3.4), et (3.7), on atteindra l'objectif.

$$\begin{aligned} V(x_0, t_0, \infty, u) &= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} \pi(t, x, u) \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (x^T L x - 2x^T P f + u^T Q u) dt \\ &\quad \text{en utilisant (3.4) : } L = -A^T P - P A + P B Q^{-1} B^T P, \text{ on obtient} \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (x^T (-A^T P - P A + P B Q^{-1} B^T P) x - 2x^T P f + u^T Q u) dt \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (-x^T A^T P x - x^T P A x + x^T P B Q^{-1} B^T P x - 2x^T P f + u^T Q u) dt \\ &\quad \text{en utilisant (3.1) : } A x = \dot{x} - B u - f \text{ et } x^T A^T = \dot{x}^T - u^T B^T - f^T \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (-(\dot{x}^T - u^T B^T - f^T) P x - x^T P (\dot{x} - B u - f) \\ &\quad + x^T P B Q^{-1} B^T P x - 2x^T P f + u^T Q u) dt \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (-\dot{x}^T P x + u^T B^T P x + f^T P x - x^T P \dot{x} + x^T P B u + x^T P f \\
&\quad + x^T P B Q^{-1} B^T P x - 2x^T P f + u^T Q u) dt \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (-\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} + u^T B^T P x + x^T P B u + f^T P x - x^T P f \\
&\quad + x^T P B Q^{-1} B^T P x + u^T Q u) dt \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt}(x^T P x) + u^T B^T P x + x^T P B u + f^T P x - (f^T P x)^T \right. \\
&\quad \left. + x^T P B Q^{-1} B^T P x + u^T Q u \right) dt \\
&\quad \text{en utilisant le fait : } f^T P x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^T P x = (f^T P x)^T, \text{ on a :} \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt}(x^T P x) + u^T Q Q^{-1} B^T P x + x^T P B Q^{-1} Q u \right. \\
&\quad \left. + x^T P B Q^{-1} Q Q^{-1} B^T P x + u^T Q u \right) dt \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} ((u^T + x^T P B Q^{-1}) Q (u + Q^{-1} B^T P x)) dt - [x^T P x]_{t_0}^{t_1} \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} (u + Q^{-1} B^T P x)^T Q (u + Q^{-1} B^T P x) dt - x(t_1)^T P x(t_1) \right) \\
&\quad + x_0^T P x_0
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Annexe B

Un calcul nécessaire pour démontrer la première étape de la première partie du théorème 3.2.2 :

On va montrer que :

$$\begin{aligned}
\pi_\rho &= x^T L x - 2x^T P h - (\rho - 1)^{-1} g^T Q g \\
&\quad + (\rho - 1)^{-1} [(\rho - 1) B^T P x - Q g]^T Q^{-1} [(\rho - 1) B^T P x - Q g] + \rho^{-1} u^T Q u \\
&=: (I)
\end{aligned} \tag{6.5}$$

car :

$$\begin{aligned}
(I) &= x^T Lx - 2x^T Ph - (\rho - 1)^{-1} g^T Qg \\
&\quad + (\rho - 1)^{-1} [(\rho - 1)x^T PB - g^T Q^T] Q^{-1} [(\rho - 1)B^T Px - Qg] + \rho^{-1} u^T Qu \\
&= x^T Lx - 2x^T Ph - (\rho - 1)^{-1} g^T Qg \\
&\quad + (\rho - 1)^{-1} [(\rho - 1)^2 x^T PBQ^{-1} B^T Px - (\rho - 1)x^T PBQ^{-1} Qg \\
&\quad - g^T Q^T Q^{-1} (\rho - 1)B^T Px + g^T Q^T Q^{-1} Qg] + \rho^{-1} u^T Qu \\
&\quad \text{comme } Q = Q^T \text{ la dernière équation devient :} \\
&= x^T Lx - 2x^T Ph - (\rho - 1)^{-1} g^T Qg \\
&\quad + (\rho - 1)x^T PBQ^{-1} B^T Px - x^T PBg - g^T B^T Px + (\rho - 1)^{-1} g^T Qg + \rho^{-1} u^T Qu \\
&= x^T Lx - 2x^T Ph + (\rho - 1)x^T PBQ^{-1} B^T Px + \rho^{-1} u^T Qu - x^T PBg - (x^T PBg)^T \\
&\quad \text{En utilisant } x^T PBg \in \mathbb{R} \Rightarrow x^T PBg = (x^T PBg)^T \text{ la dernière ligne devient :} \\
&= x^T Lx - 2x^T Ph + (\rho - 1)x^T PBQ^{-1} B^T Px + \rho^{-1} u^T Qu - 2x^T PBg \\
&= x^T Lx - 2x^T P(h + Bg) + (\rho - 1)x^T PBQ^{-1} B^T Px + \rho^{-1} u^T Qu \\
&= x^T Lx - 2x^T Pf + (\rho - 1)x^T PBQ^{-1} B^T Px + \rho^{-1} u^T Qu \\
&= (3.31) =: \pi_\rho
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Donc, on a bien $\pi_\rho = (I)$, c'est à dire que légalité (3.34) est vérifiée.

Annexe C

Un calcul nécessaire pour démontrer la première étape de la deuxième partie du théorème 3.2.2 :

On va montrer que :

$$\begin{aligned}
V_\rho &= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} \rho^{-1} (u + \rho Q^{-1} B^T Px)^T Q (u + \rho Q^{-1} B^T Px) dt - x(t_1)^T Px(t_1) \right) \\
&\quad + x_0^T Px_0
\end{aligned} \tag{6.7}$$

En substituant (3.1), (3.4) et (3.31) dans $V_\rho(x_0, t_0, \infty, u)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
V_\rho &= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} \pi_\rho(t, x, u) dt \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (x^T Lx - 2x^T P f + (\rho - 1)x^T P B Q^{-1} B^T P x + \rho^{-1} u^T Q u) dt \\
&\quad \text{En utilisant le résultat (3.4) : } L = -A^T P - P A + P B Q^{-1} B^T P, \text{ on a :} \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (-x^T A^T P x - x^T P A x + x^T P B Q^{-1} B^T P x - 2x^T P f \\
&\quad + (\rho - 1)x^T P B Q^{-1} B^T P x + \rho^{-1} u^T Q u) dt \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (-x^T A^T P x - x^T P A x + x^T P B Q^{-1} B^T P x - 2x^T P f \\
&\quad + \rho x^T P B Q^{-1} B^T P x - x^T P B Q^{-1} B^T P x + \rho^{-1} u^T Q u) dt \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (\rho^{-1} u^T Q u + \rho x^T P B Q^{-1} B^T P x - 2x^T P f - x^T A^T P x - x^T P A x) dt \\
&\quad \text{En utilisant (3.1) : } A x = \dot{x} - B u - f \text{ et } x^T A^T = \dot{x}^T - u^T B^T - f^T \text{ on a :} \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (\rho^{-1} u^T Q u + \rho x^T P B Q^{-1} B^T P x - 2x^T P f - \dot{x}^T P x + u^T B^T P x \\
&\quad + f^T P x - x^T P \dot{x} + x^T P B u + x^T P f) dt \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} (\rho^{-1} u^T Q u + \rho x^T P B Q^{-1} B^T P x + u^T B^T P x + x^T P B u \\
&\quad + f^T P x - x^T P f - \frac{d}{dt}(x^T P x)) dt \\
&\quad \text{Comme } f^T P x = (x^T P f)^T \text{ et } x^T P f \in \mathbb{R} \text{ ceci implique } x^T P f = (x^T P f)^T \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} (\rho^{-1} u^T Q u + \rho x^T P B Q^{-1} B^T P x + u^T Q Q^{-1} B^T P x + x^T P B Q^{-1} Q u) dt \right. \\
&\quad \left. - [x^T P x]_{t_0}^{t_1} \right) \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} \rho^{-1} (u^T Q u + \rho^2 x^T P B Q^{-1} Q Q^{-1} B^T P x + \rho u^T Q Q^{-1} B^T P x \right. \\
&\quad \left. + \rho x^T P B Q^{-1} Q u) dt - x(t_1)^T P x(t_1) \right) + x_0^T P x_0 \\
&= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} \rho^{-1} (u^T + \rho x^T P B Q^{-1}) Q (u + \rho Q^{-1} B^T P x) dt - x(t_1)^T P x(t_1) \right) \\
&\quad + x_0^T P x_0
\end{aligned}$$

(6.8)

$$= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} \rho^{-1} (u + \rho Q^{-1} B^T P x)^T Q (u + \rho Q^{-1} B^T P x) dt - x(t_1)^T P x(t_1) \right) + x_0^T P x_0$$

(6.9)

Annexe D

Un calcul nécessaire pour démontrer le troisième point du théorème 4.3.1

On va montrer que :

$$\dot{w}(x) = -x^T (\alpha L - \delta P B Q^{-1} B^T P) x + (1 - \beta) \phi^T Q \phi - 2\phi^T Q u_L^0 + (1 - \delta) (u_L^0)^T Q u_L^0 :$$

En effet :

C'est la dérivée de w le long des trajectoires du système (4.2).
En utilisant (3.4) , (3.5) , (3.10) et (4.2) , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{w}(x) &= \frac{d}{dt} (x^T P x) \\ &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &\quad \text{En utilisant (4.2) : } \dot{x} = Ax + B\phi + f \text{ et } \dot{x}^T = x^T A^T + \phi^T B^T + f^T, \text{ on a :} \\ &= x^T A^T P x + \phi^T B^T P x + f^T P x + x^T P A x + x^T P B \phi + x^T P f \\ &= x^T (A^T P + P A) x + \phi^T B^T P x + (\phi^T B^T P x)^T + f^T P x + (f^T P x)^T \\ &\quad \text{En y remplaçant (3.4) : } A^T P + P A = P B Q^{-1} B^T P - L, \text{ on a :} \\ &= x^T (P B Q^{-1} B^T P - L) x + \phi^T B^T P x + (\phi^T B^T P x)^T + x^T P f + (x^T P f)^T \\ &\quad \text{Comme } \phi^T B^T P x \in \mathbb{R} \text{ ceci entraine que } \phi^T B^T P x = (\phi^T B^T P x)^T \\ &\quad \text{Comme } x^T P f \in \mathbb{R} \text{ ceci entraine que } x^T P f = (x^T P f)^T, \text{ on a :} \\ &= -x^T (L - P B Q^{-1} B^T P) x + 2\phi^T B^T P x + 2x^T P f \\ &= -x^T L x + 2x^T P f + x^T P B Q^{-1} B^T P x + 2\phi^T B^T P x \end{aligned}$$

(6.10)

En remplaçant u par $\phi(t, u_L^0)$ dans (3.10) on a :

$$\begin{aligned}
\pi &= x^T Lx - 2x^T P f + \phi^T Q \phi \geq \alpha x^T Lx + \beta \phi^T Q \phi \\
&\Leftrightarrow -x^T Lx + 2x^T P f \leq -\alpha x^T Lx - \beta \phi^T Q \phi + \phi^T Q \phi \\
&\leq -\alpha x^T Lx - \beta \phi^T Q \phi + \phi^T Q \phi + x^T P B Q^{-1} B^T P x + 2\phi^T B^T P x \\
&= -\alpha x^T Lx + (1 - \beta) \phi^T Q \phi + x^T P B Q^{-1} B^T P x + 2\phi^T B^T P x \\
&= -\alpha x^T Lx + (1 - \beta) \phi^T Q \phi + x^T P B Q^{-1} B^T P x + \delta x^T P B Q^{-1} B^T P x \\
&\quad - \delta x^T P B Q^{-1} B^T P x + 2\phi^T B^T P x
\end{aligned}$$

En y insérant le coût optimal (3.5) : $u_L^0 = -Q^{-1} B^T P x$, on a :

$$\begin{aligned}
&= -\alpha x^T Lx + (1 - \beta) \phi^T Q \phi + \delta x^T P B Q^{-1} B^T P x + (1 - \delta) x^T P B Q^{-1} B^T P x \\
&\quad - 2\phi^T Q u_L^0 \\
&= -x^T (\alpha L - \delta P B Q^{-1} B^T P) x + (1 - \beta) \phi^T Q \phi - 2\phi^T Q u_L^0 \\
&\quad + (1 - \delta) x^T P B Q^{-1} Q Q^{-1} B^T P x \\
&= -x^T (\alpha L - \delta P B Q^{-1} B^T P) x + (1 - \beta) \phi^T Q \phi - 2\phi^T Q u_L^0 \\
&\quad + (1 - \delta) (-Q^{-1} B^T P x)^T Q (-Q^{-1} B^T P x) \\
&= -x^T (\alpha L - \delta P B Q^{-1} B^T P) x + (1 - \beta) \phi^T Q \phi - 2\phi^T Q u_L^0 \\
&\quad + (1 - \delta) (u_L^0)^T Q u_L^0
\end{aligned}$$

(6.11)

Annexe E

Un calcul nécessaire pour démontrer le point b de la remarque 3 de la section 4.4.

Calculons $\dot{w}(x)$:

$$\begin{aligned}
\dot{w}(x) &= \frac{d}{dt}(x^T P x) \\
&= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\
&\quad \text{en utilisant (4.2) : } \dot{x} = Ax + B\phi + f \Rightarrow \dot{x}^T = x^T A^T + \phi^T B^T + f^T \\
&= x^T A^T P x + \phi^T B^T P x + f^T P x + x^T P A x + x^T P B \phi + x^T P f \\
&= x^T (A^T P + P A) x + 2\phi^T B^T P x + 2x^T P f \\
&\quad \text{on utilise (3.4) : } A^T P + P A = P B Q^{-1} B^T P - L
\end{aligned}$$

(6.12)

$$\begin{aligned}
&= -x^T Lx + 2x^T Pf + x^T PBQ^{-1}B^T Px + 2\phi^T B^T Px \\
&\quad \text{Avec } \pi_\rho = x^T Lx - 2x^T Pf + (\rho - 1)x^T PBQ^{-1}B^T Px + \rho^{-1}\phi^T Q\phi \\
&\quad \geq \alpha_\rho x^T Lx + \beta_\rho \phi^T Q\phi, \text{ on a :} \\
&\leq -\alpha_\rho x^T Lx - \beta_\rho \phi^T Q\phi + (\rho - 1)x^T PBQ^{-1}B^T Px + \rho^{-1}\phi^T Q\phi \\
&\quad + x^T PBQ^{-1}B^T Px + 2\phi^T B^T Px \\
&= -\alpha_\rho x^T Lx + (\rho^{-1} - \beta_\rho)\phi^T Q\phi + \rho x^T PBQ^{-1}B^T Px + \delta_\rho x^T PBQ^{-1}B^T Px \\
&\quad - \delta_\rho x^T PBQ^{-1}B^T Px + 2\phi^T B^T Px \\
&= -\alpha_\rho x^T Lx + (\rho^{-1} - \beta_\rho)\phi^T Q\phi + \delta_\rho x^T PBQ^{-1}B^T Px \\
&\quad + (\rho - \delta_\rho)x^T PBQ^{-1}B^T Px + 2\rho\rho^{-1}\phi^T QQ^{-1}B^T Px \\
&\quad \text{En y insérant } u_\rho = -\rho Q^{-1}B^T Px, \text{ on obtient :} \\
&= -\alpha_\rho x^T Lx + (\rho^{-1} - \beta_\rho)\phi^T Q\phi + \delta_\rho x^T PBQ^{-1}B^T Px \\
&\quad + (\rho - \delta_\rho)x^T PBQ^{-1}B^T Px - 2\rho^{-1}\phi^T Qu_\rho \\
&= -x^T(\alpha_\rho L - \delta_\rho PBQ^{-1}B^T P)x + (\rho^{-1} - \beta_\rho)\phi^T Q\phi - 2\rho^{-1}\phi^T Qu_\rho \\
&\quad + (\rho - \delta_\rho)\rho^{-2}\rho^2 x^T PBQ^{-1}QQ^{-1}B^T Px \\
&= -x^T(\alpha_\rho L - \delta_\rho PBQ^{-1}B^T P)x + (\rho^{-1} - \beta_\rho)\phi^T Q\phi - 2\rho^{-1}\phi^T Qu_\rho \\
&\quad + \rho^{-2}(\rho - \delta_\rho)(-\rho Q^{-1}B^T Px)^T Q(-\rho Q^{-1}B^T Px) \\
&= -x^T(\alpha_\rho L - \delta_\rho PBQ^{-1}B^T P)x + (\rho^{-1} - \beta_\rho)\phi^T Q\phi - 2\rho^{-1}\phi^T Qu_\rho \\
&\quad + \rho^{-2}(\rho - \delta_\rho)u_\rho^T Qu_\rho
\end{aligned} \tag{6.13}$$